СПРАВОЧНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ФУНКЦИИ, ПРЕДЕЛЫ РЯДЫ, ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

ФИЗМАТГИЗ · 1961

СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

Л. А. ЛЮСТЕРНИКА

И

А. Р. ЯНПОЛЬСКОГО

В. Л. ДАНИЛОВ, А. Н. ИВАНОВА, Е. К. ИСАКОВА,
Л. А. ЛЮСТЕРНИК, Г. С. САЛЕХОВ,
А. Н. ХОВАНСКИЙ, Л. Я. ЦЛАФ, А. Р. ЯНПОЛЬСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ФУНКЦИИ, ПРЕДЕЛЫ, РЯДЫ, ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

АННОТАЦИЯ

Этой книгой открывается серия справочников по различным разделам математики. В выпусках серии дается изложение основных понятий классической и современной математики. Характер изложения конспективный; в логически связной форме разъясняются математические факты; теоремы и формулы, как правило, даются без доказательств; излагаемый материал иллюстрируется примерами, выявляющими его значение, в частности, для приложений; приводятся различные таблицы; сообщаются краткие исторические сведения. Главное внимание уделяется идейной стороне вопроса, не заслоненной излишними деталями.

Серия рассчитана на читателя, знакомого с основами математического анализа. Выпуски серии могут служить как для получения справки из знакомого читателю раздела математики, так и, в случае надобности, для первоначального ознакомления с новым для него разделом.

Настоящий выпуск серии *СМБ* посвящен основным понятиям анализа, связанным с предельным переходом. В нем излагаются следующие вопросы: числовая прямая и функции на ней, пространства n измерений, функции и операторы в них (включая основы теории выпуклых тел), числовые и функциональные ряды, ортогональные ряды и многочлены, цепные дроби, некоторые системы чисел и функций, в том числе простейшие специальные функции.

Справочник предназначен для лиц, пользующихся в своей работе математическим анализом (математиков, физиков, инженеров), а также для студентов и аспирантов.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава II

n-мерные пространства и функции в них

Глава III

Ряды

Глава IV
Ортогональные ряды и ортогональные системы

Глава V
Цепные дроби

Глава VI

Некоторые системы чисел и функций

ОТ РЕДАКЦИИ СЕРИИ ВЫПУСКОВ «СПРАВОЧНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ БИБЛИОТЕКИ» (*СМБ*)

На русском языке имеется ряд получивших признание справочников по элементарной математике, а также по высшей математике, соответствующих втузовскому курсу, или несколько выходящих за его пределы. В разделах математики, не представленных в таких справочных изданиях, до недавнего времени нуждался сравнительно ограниченный круг лиц. Однако за последние полтора десятилетия положение существенно изменилось. Значительно возросло число специалистов, получивших математическое образование. В еще большей степени выросло число специалистов-нематематиков: физиков, инженеров новых специальностей и др., использующих в своей работе математический аппарат. Появились втузы и отдельные факультеты втузов с повышенной программой по математике. Возросло число аспирантов технических специальностей, изучающих дополнительные главы математики. При многих университетах организованы математические курсы повышения квалификации инженеров. Повсеместно возникают вычислительные центры со штатами вычислителей — математиков и инженеров. Математические методы начинают применять в своей работе и такие прежде далекие от математики специалисты, как экономисты, лингвисты, биологи, медики и др.

Для этих именно лиц — математиков и нематематиков — предназначены выпуски серии. Это весьма широкий круг читателей, состоящий из студентов и аспирантов вузов, работников научно-исследовательских институтов, заводских лабораторий и высших учебных заведений, которым в их повседневной работе и учебе приходится встречаться с самыми разнообразными областями математики. К числу таких областей относятся не только исторически давно оформившиеся и продолжающие развиваться разделы, но и недавно возникшие, например, теория линейного и нелинейного программирования, теория информации, теория игр и т. д., потребность в которых возникла в связи с бурным развитием физики, техники и экономики. Так, в частности, новая вычислительная техника, обслуживающая самые разнообразные области науки, техники и народного хозяйства, вызвала к жизни новую математическую дисциплину — программирование на вычислительных машинах.

Наряду с продолжающимся внедрением в практику «традиционно-прикладных» разделов математики начинают приобретать практическое значение и некоторые разделы, ранее считавшиеся чисто теоретическими. В связи с этим нередко встречающееся подразделение математики на «приложимую» и теоретическую, предназначенную только для внутреннего потребления в самой математике, в значительной степени утратило свое значение. Одним из многих примеров может служить теория выпуклых тел, основы которой излагаются в данной книге. Эта теория не так давно представляла только геометрический (и теоретико-числовой) интерес, но за последние годы стала играть большую роль в ряде вопросов прикладной математики (линейное программирование, теория игр и др.). Другим примером может служить качественная теория дифференциальных уравнений, нашедшая применение в радиотехнике, в теории автоматического регулирования и в других технических дисциплинах. Общеизвестна роль спектральных операторов в теоретической физике. В связи с потребностями «машинной математики» и некоторых технических наук возникла прикладная математическая логика.

Математика оказывает все большее влияние на практику и своей логической стороной, силой математического мышления. Это определяется характером современной математики, создаваемыми ею понятиями (модели и др.), приобретающими универсальное значение.

И в самой математике некоторые прикладные разделы получили дальнейшее развитие на базе других разделов теоретического характера. Так, современная теория вероятностей, математическая статистика и связанные с ними новые области, например теория информации, используют понятия теории функций действительного переменного, современный прикладной анализ строится на базе функционального анализа и т. д.

Многие разделы прикладной математики значительно выросли и изменили свое содержание. Еще недавно приближенные методы для решения задач анализа охватывали сравнительно узкий круг вопросов. Однако в настоящее время положение изменилось. Появившаяся возможность численно решать на машинах новые более сложные задачи, в том числе и задачи современной физики и техники, значительно расширила область применения приближенных методов. В математических расчетах стали широко пользоваться большим набором «специальных» функций, впервые протабулированных в последнее время.

Неизмеримо выросла роль статистических методов в приложениях математики, в частности, в указанных выше новых областях прикладного анализа. В связи с новой вычислительной техникой появился метод статистических испытаний (так называемый метод Монте-Карло) в приближенном численном решении задач алгебры и анализа.

И в таких классических разделах математики, как вариационное исчисление, дифференциальные уравнения с частными производными и др., появился ряд новых задач, поставленных современной наукой и техникой.

Все эти обстоятельства коренным образом изменили «математическую конъюнктуру» и вызвали жизненную необходимость в справочных изданиях более широкого профиля, нежели существующие справочники. В этих условиях справочные руководства должны освещать не только достаточно подробно изученные классические области математики, но и новые разделы и направления, если они уже сложились и стали нужными широкому кругу читателей.

В выпусках настоящей серии будут содержаться разделы математики как непосредственно встречающиеся при решении различных прикладных задач, так и служащие основой для выработки методов решения таких задач.

Перед серией в целом поставлены две цели: с одной стороны, выпуски ее должны дать возможность получить справку из того или иного уже знакомого читателю раздела математики; с другой стороны, они должны, в случае надобности, служить и для первоначального ознакомления с новыми разделами.

Известно, что попытки самостоятельно изучить новые незнакомые области математики по имеющимся учебным курсам, а тем более монографиям, часто бывают мало эффективны. Это объясняется тем, что нередко эти курсы написаны мало доступным нематематику языком и чрезмерно перегружены материалом. Между тем на первых порах читатель может ограничиться только основными фактами, изложенными в конспективной, но логически связной форме. Во многих случаях этого бывает достаточно для приложений.

Поэтому в выпусках серии уделяется особое внимание выявлению идейной стороны вопроса, не заслоненной деталями. Формулируются и разъясняются основные понятия, излагаются основные факты. Теоремы и формулы приводятся, как правило, без доказательств, за отдельными исключениями, когда это требуется для понимания существа вопроса или в тех случаях, когда они имеют принципиальное самостоятельное значение. Впрочем, и в этих случаях часто бывает достаточно ограничиться указанием в общих чертах только хода рассуждений.

Излагаемый материал иллюстрируется примерами, выявляющими его значение, в частности, для приложений.

Невозможно дать исчерпывающие сведения по каждому из разделов, поэтому их изложение сопровождается достаточно полным списком литературы по данному вопросу. Приводимая библиография поможет читателю, в случае надобности, обратиться к источникам, по которым он сумеет более подробно изучить интересующий его вопрос, познакомиться с доказательствами теорем, выводом формул и т. д.

Всюду, где это представляется возможным, приводятся краткие исторические сведения.

Естественно было бы желать единообразного стиля изложения материала в выпусках серии. Однако осуществить это желание в полной мере невозможно. Теоретическому материалу больше соответствует повествовательная форма изложения, чисто справочному — лаконическая, позволяющая экономно использовать объем книги, что весьма важно, если учесть, что в выпусках серии справочный материал в узком смысле слова (формулы, таблицы и т. д.) должен быть представлен с большей полнотой, чем в учебниках. Наконец, своеобразие новых областей математики (программирование и др.) требует отыскания особых форм изложения, во многом отличных от того традиционного стиля, которым излагаются классические разделы.

Приступая к изданию серии выпусков *СМБ*, мы учитываем наличие различных справочников по математике на русском языке. Поэтому обычно в нее не включается материал, относящийся к элементарной математике и к втузовскому курсу высшей математики, достаточно освещенный в существующих справочниках. В случае надобности будут даваться ссылки на широко распространенный «Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов» И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева. Однако некоторые повторения неизбежны. Отдельные вопросы, излагаемые в «Справочнике» Бронштейна и Семендяева, могут быть частично изложены и в нашей серии, если они требуют более подробного или более глубокого освещения.

В ближайший период предполагается издать выпуски серии по следующим разделам: математический анализ, высшая алгебра, дифференциальные и интегральные уравнения, качественные методы анализа, интегральные преобразования и операционное исчисление, программирование, вариационное исчисление и вариационные методы, приближенные методы анализа, функциональный анализ и др.

Как правило, каждый отдельный выпуск посвящается одному разделу или нескольким родственным по тематике разделам и по возможности независим от содержания других выпусков. Это, впрочем, не исключает, в случае необходимости, перекрестных ссылок между выпусками.

Информация о вышедших в свет, а также готовящихся к печати выпусках серии будет даваться в конце каждого выпуска.

Редакция серии обращается к читателям с просьбой направлять свои замечания и пожелания по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, Физматгиз, редакция справочной литературы.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящей книгой открывается серия справочников по различным разделам классической и современной математики. Этот выпуск серии «Справочная математическая библиотека» (*СМБ*) вместе со следующим, посвященным операциям дифференцирования и интегрирования, охватывает основную часть материала, излагаемого в больших курсах математического анализа. В этот выпуск включены общие вопросы теории непрерывных функций одного и нескольких переменных (вместе с геометрической базой этой теории), теории предельного перехода для последовательностей чисел и векторов, а также теории числовых и функциональных рядов и других аналогичных бесконечных процессов, в частности бесконечных цепных дробей.

Глава I «Числовая прямая и функции на ней» (авторы Л. А. Люстерник и Е. К. Исакова) посвящена действительным числам, числовой прямой, предельному переходу на ней, функциям одного переменного. Материал этой главы ближе всего стоит к тому, что принято называть введением в математический анализ.

В главе II «n-мерные пространства и функции в них» (автор Л. А. Люстерник) осуществляется переход от функций одного переменного к функциям n переменных, что геометрически отвечает переходу от числовой прямой к пространству n измерений E_n. Эта глава содержит основы теории n-мерного пространства E_n. § 1 посвящен основам n-мерной геометрии и, в частности, теории ортогональных систем векторов в E_n, которая служит простейшей моделью для изложения (в главе IV) теории ортогональных систем функций. § 2 посвящен предельному переходу в E_n, непрерывным функциям n переменных и их системам (операторам в E_n). Вследствие большой роли, которую играет в теоретической и прикладной математике теория n-мерных выпуклых тел, в главу включен § 3, в котором дается изложение этой теории.

Глава III «Ряды» (авторы Г. С. Салехов и В. Л. Данилов) состоит из теории рядов и практических методов их вычисления.

В § 1 излагается теория числовых рядов с включением вопросов, относящихся к бесконечным произведениям, двойным рядам и суммированию сходящихся рядов. Наряду с классическим материалом здесь приводятся и новые результаты об общих признаках сходимости рядов и оценках остаточного члена.

В § 2 рассматриваются важнейшие классы функциональных рядов: степенные, тригонометрические, а также асимптотические степенные ряды и их сходимость. Здесь же приведены некоторые способы обобщенного суммирования расходящихся рядов.

В § 3 приведены различные вычислительные методы теории рядов.

В главе IV «Ортогональные ряды и ортогональные системы» (авторы А. Н. Иванова и Л. А. Люстерник) содержатся общие вопросы разложения функций в ортогональные (а также биортогональные) ряды. Здесь рассматриваются также общие ортогональные системы многочленов и классические системы ортогональных многочленов Лежандра, Чебышева, Эрмита и др.

В главе V «Цепные дроби» (автор А. Н. Хованский) дается изложение раздела анализа, которым занимались крупнейшие математики XVIII и XIX веков, но который потом оказался несправедливо забытым. Цепным дробям не нашлось места во многих современных больших курсах анализа, а между тем сравнительно недавно некоторые элементы теории цепных дробей изучались даже в средней школе. В последнее время появился интерес к цепным дробям в связи с их применением к вычислительной математике и другими приложениями. В этой главе особое внимание уделено представлению функций цепными дробями.

Глава VI «Некоторые системы чисел и функций» (авторы Л. А. Люстерник, Л. Я. Цлаф и А. Р. Янпольский) носит более справочный (в узком смысле слова) характер. Здесь содержится материал о некоторых константах, о наиболее

2 Зак. 2048. В. Л. Данилов и др.

важных системах чисел, включая числа Бернулли и Эйлера, о многочленах Бернулли и Эйлера, о некоторых разрывных функциях, о простейших специальных функциях (эллиптических интегралах, интегральных функциях, гамма- и бета-функциях, некоторых функциях Бесселя и др.). Вместе с ортогональными многочленами эти функции после элементарных, являются наиболее употребительными в математической практике. Заметим, что в одном из последующих выпусков будут даны специальные функции более полно и притом в комплексной области.

ГЛАВА I
ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ И ФУНКЦИИ НА НЕЙ

§ 1. Действительные числа и числовая прямая

1. Действительные числа. Все *действительные* или *вещественные* числа разбиваются на два класса: *рациональные* и *иррациональные* числа. К рациональным числам относятся все *целые* и *дробные* числа (*положительные*, *отрицательные* и *нуль*), к иррациональным — все остальные числа.

Множество всех рациональных чисел является *всюду плотным*, т. е. между любыми двумя различными рациональными числами a и b $(a < b)$ найдется, по крайней мере, еще одно рациональное число $c\,(a < c < b)$, а значит, и бесконечно много рациональных чисел.

Иррациональными числами являются, например: $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, $\pi = 3{,}14159\ldots$, $e = 2{,}7182818\ldots$ — основание натуральных логарифмов и т. д. Иррациональные числа состоят из алгебраических и трансцендентных чисел. *Алгебраическими иррациональными* числами называются все нецелые действительные корни алгебраических уравнений

$$x^n + a_1x^{n-1} + \qquad + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где a_i $(i = 1,\ 2, \qquad n)$ — целые числа; например, корни $x = \sqrt[3]{10}$, $x = \sqrt[5]{8}$ уравнений $x^3 - 10 = 0$, $x^5 - 8 = 0$, корни уравнения $x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 1 = 0$ и т. д. Остальные иррациональные числа называются *трансцендентными*; примерами их являются числа: π, e, e^π, $2^{\sqrt{2}}$, $\lg n$ (где n — любое целое число, не равное 10^k) и т. д.

2. Числовая прямая. Выберем на прямой E_1: *начало отсчета* — начало координат 0, *масштаб* — единицу длины и *направление* — ориентацию. Каждому действительному числу x на прямой E_1 поставим в соответствие точку $A(x)$, имеющую координату (абсциссу) x, и, наоборот, каждой точке $A(x)$ на прямой E_1 поставим в соответствие действительное число x — ее абсциссу. Прямая E_1 называется *числовой прямой* или *одномерным координатным пространством* (об n-мерных координатных пространствах E_n см. гл. II).

Число

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{при} \quad a < 0, \\ a & \text{при} \quad a \geqslant 0 \end{cases}$$

называется *абсолютным* или *арифметическим* значением числа a.

Справедливы соотношения:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$|a-b| \geqslant ||a| - |b||,$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Число $|a-b|$ есть *расстояние* между точками a и b на прямой E_1 (см. гл. II, § 1, п. 1).

3. p-ичные системы. Всякое действительное число представимо десятичной дробью, т. е. имеет определенное разложение в десятичной системе счисления. Десятичная система является частным случаем позиционной *p-ичной системы*, за основание которой может быть взято любое натуральное число $p > 1$. Знаки $0, 1, 2, \ldots, p-1$ называются *цифрами* этой системы, а p^k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — *единицами k-го разряда* в этой системе.

Каждое целое положительное число N представимо и притом однозначно в виде

$$N = a_0 p^0 + a_1 p^1 + \qquad + a_n p^n = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i, \tag{1.1}$$

где a_i — цифры. Равенство (1.1) записывают в таком виде

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0. \tag{1.1'}$$

Аналогично, любое положительное действительное число S, рациональное или иррациональное, представляют p-ичной дробью

$$S=\sum_{k=-\infty}^{n} a_k p^k, \tag{1.2}$$

что записывают в виде

$$S=a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots \tag{1.2'}$$

Если S — иррациональное число, то оно однозначно представляется бесконечной непериодической p-ичной дробью вида (1.2) (соответственно (1.2′)).

Если же число S — рациональное, то оно представимо бесконечной периодической p-ичной дробью, например, в десятичной системе число $S=\frac{1}{6}$ записывается так:

$$S=0,1666\ldots=0,1\,(6).$$

В двоичной системе $S=\frac{1}{6}$ выражается бесконечной дробью

$$S=0,0010101 \qquad =0,0\,(01)=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots$$

p-ичные рациональные числа суть числа, представимые дробями со знаменателем p^k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$; каждое из таких чисел имеет два представления в p-ичной системе: одно с 0 в периоде, другое — с $p-1$ в периоде.

Например, число $S=\frac{1}{2}$ выражается в двоичной системе так:

$$S=0,1000\ldots\ =0,1\,(0),$$
$$S=0,0111 \qquad =0,0\,(1);$$

а в десятичной системе

$$S=0,5000\ldots\ =0,5\,(0),$$
$$S=0,4999\ldots\ =0,4\,(9).$$

Выбирая одно из этих представлений для p-ичных рациональных чисел, например первое — с 0 в периоде, получим однозначное представление p-ичных рациональных чисел бесконечными периодическими p-ичными дробями, а вместе с этим — однозначное представление для всех действительных чисел.

У различных народов в древности встречались элементы разных p-ичных систем, следы которых сохранились и до настоящего времени в некоторых языках, например, при $p=12$ (счет дюжинами и гроссами), $p=20$ (следы этой системы сохранились во французском языке), $p=40$ («сорок сороков») и т. д. Значительного развития получила 60-ричная система, возникшая в древнем Вавилоне (ее следы остались в мерах углов и времени). Шестидесятеричная система в Средние века долго конкурировала на Ближнем Востоке и в Средней Азии с десятичной. Десятичная система возникла в Индии, получила дальнейшее развитие в Средней Азии и оттуда перешла в Европу.

В настоящее время в вычислительных машинах широко применяется двоичная система (и связанные с нею системы, имеющие в основании степени двойки — $p=2^k$, $k>1$ — целое). В машине Московского государственного университета «Сетунь» используется троичная система счисления. Иногда в качестве p цифр p-ичной системы применяется набор p чисел, отличных от $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Например, в троичной системе удобным является набор цифр: $-1, 0, 1$. В двоичной системе можно пользоваться цифрами -1 и 1.

Более общие позиционные системы — неоднородные, в которых отношения единиц последовательных разрядов — разные числа. Такие системы применялись (до введения метрической системы) для изображения «именованных» чисел, именно, для изображения таких величин, как длина, вес и т. д. Например, в дореволюционной России для измерения веса была система единиц: 1 пуд ($\approx$16 *кг*)=40 фунтов, 1 фунт ($\approx$400 *г*) = 32 лота и т. д.

4. Множества действительных чисел. Будем рассматривать различные множества действительных чисел. Например, множество натуральных чисел: $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$, множество всех правильных дробей, множество всех рациональных чисел, множество всех действительных чисел между 0 и 1 и т. д. Числа называются *элементами* соответствующих множеств.

Рассматривают множества не только действительных чисел, но и множества элементов произвольной природы. Например, множество точек плоскости, множество деревьев в некотором районе и т. д. Элементами данных множеств будут, соответственно, точки плоскости, деревья и т. д.

Множества в этой книге обозначаются большими буквами: M, N, A, B, X, Y и т. д. или символом $\{x_n\}$, где x_n — элементы множества.

Множество чисел, удовлетворяющих неравенствам $a<x<b$ (a, b — числа), называется *интервалом* и обозначается: (a, b).

Множества чисел, удовлетворяющих неравенствам $x < a$, $x > b$, называются *бесконечными интервалами* и обозначаются, соответственно, $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$. Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* (или *сегментом*, или *замкнутым промежутком*) и обозначается $[a, b]$.

Множества точек x, удовлетворяющих неравенствам

$$a \leqslant x < b, \quad a < x \leqslant b,$$

называются *полуинтервалами* и обозначаются, соответственно, $[a, b)$, $(a, b]$.

Аналогично определяются *бесконечные полуинтервалы* $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$.

Интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ называется ε-*окрестностью* точки x.

Если элемент x *принадлежит* (*не принадлежит*) множеству X, то это символически записывают так: $x \in X$ ($x \bar{\in} X$ или $x \notin X$).

Если все элементы множества X являются одновременно элементами множества Y, то X называется *подмножеством* множества Y, что символически записывают так: $X \subset Y$. В противном случае X не является подмножеством Y, что символически записывают так: $X \bar{\subset} Y$ (или $X \not\subset Y$). Например,

$$\frac{1}{3} \in (0, 1), \quad a \in [a, b), \quad a \bar{\in} (a, b), \quad b \bar{\in} [a, b);$$

$$(0, 1) \subset [0, 1), \quad [1, 2] \bar{\subset} (0, 1), \quad (a, b) \subset [a, b).$$

Множество M всех тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением* или *произведением* множеств A и B, и символически обозначается так:

$$M = A \cap B \qquad (M = A \times B = A \cdot B = AB).$$

Например,

$$(0, 1] = \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \cap (0, 2), \quad b = (a, b] \cap [b, c)$$

и т. д.

Множество M, состоящее из всех элементов, которые принадлежат либо множеству A, либо множеству B, называется *объединением* или *суммой* множеств A и B, и символически обозначается так:

$$M = A \cup B \quad (M = A + B).$$

Например,

$$(0,\ 2)\cup\left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)=(0,\ +\infty),\ (-3,\ 7]\cup(5,\ 8]=(-3,\ 8].$$

Множество M, состоящее из тех элементов множества B, которые не принадлежат множеству A, называется *дополнением* множества A до множества B, или *разностью* множеств A и B, и символически обозначается так:

$$M=B\setminus A \qquad (M=B-A).$$

Например,

$$(7,\ 8]=(5,\ 8]\setminus(-3,\ 7],\quad (0,\ 2)\setminus\left[0,\ \frac{1}{2}\right)=\left[\frac{1}{2},\ 2\right) \text{ и т. д.}$$

Запись $B\setminus A$ употребляется и в более общих случаях.

5. Ограниченные множества, верхняя и нижняя границы. Множество чисел X называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует число M (m), не меньшее (не большее) всех чисел x из X. Число M (m) называется *верхней* (*нижней*) *границей* множества X.

Множество X называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Например, множество $(-\infty,\ 0)$ ограничено сверху, множество $(0,\ +\infty)$ ограничено снизу, а $(0,\ 1)$ — ограниченное множество.

Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) границ множества X называется *точной верхней* (*нижней*) *границей или гранью* M^* (m^*) множества X и символически записывается так:

$$M^*=\sup_{x\in X} x \quad \left(m^*=\inf_{x\in X} x\right).$$

Числа M^* и m^* обладают следующими свойствами:

1) Для любого x из X справедливы неравенства

$$M^*\geqslant x,\quad m^*\leqslant x.$$

2) Каково бы ни было число $\varepsilon>0$, найдется такое число $x_0\in X$, для которого, соответственно,

$$x_0\geqslant M^*-\varepsilon,\quad x_0\leqslant m^*+\varepsilon.$$

Например,

$$\sup_{x\in(-\infty,\ 0)} x=0,\qquad \inf_{x\in(0,\ x)} x=0.$$

3) Если множество $X = \{x\}$ ограничено сверху (снизу), то оно имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.

Частными случаями точной верхней и нижней границ множества служат введенные ниже (§ 2, п. 2) понятия точной верхней и нижней границы функции.

6. Теория иррациональных чисел. Во второй половине XIX века в связи с критическим пересмотром основных понятий анализа появились строгие теории иррациональных чисел Дедекинда, Кантора и Вейерштрасса.

Теория Дедекинда. Множество всех рациональных чисел со всеми их свойствами считается данным. Множество всех рациональных чисел разбивают на два класса A и A'. Такое разбиение называют *сечением в области рациональных чисел*, если выполнены условия:

а) каждое рациональное число попадает в одно и только одно из множеств A и A',

б) каждое число a из множества A меньше каждого числа a' из множества A'.

Множество A' называется *верхним классом*, а множество A — *нижним*; сечение обозначают так: $A \mid A'$.

Сечения могут быть трех видов:

1) либо в нижнем классе A нет наибольшего числа, а в верхнем классе A' есть наименьшее число r;

2) либо в нижнем классе A есть наибольшее число r, а в верхнем классе A' нет наименьшего;

3) либо ни в нижнем классе нет наибольшего, ни в верхнем — нет наименьшего.

В первых двух случаях говорят, что сечение производится рациональным числом r (которое является пограничным между классами A и A'), или говорят, что сечение определяет рациональное число r. В третьем случае сечение $A \mid A'$ не определяет никакого рационального числа; говорят, что сечение вида 3) определяет некоторое иррациональное число α.

Например, если в класс A отнести все числа $a \leqslant 0$, а также те числа $a > 0$, у которых $a^2 < 2$, а в A' — все остальные, то сечение $A \mid A'$ определяет иррациональное число $\sqrt{2}$.

Все действительные числа можно упорядочить следующим образом: два иррациональных числа α и β, определяемые соответственно сечениями $A \mid A'$ и $B \mid B'$, считаются равными, если сечения $A|A'$ и $B|B'$ тождественны, и наоборот, если сечения $A|A'$ и $B|B'$ совпадают, то говорят, что соответствующие иррациональные числа равны. Говорят, что число $\alpha > \beta$, если класс A целиком содержит в себе класс B, не совпадая с ним, и $\alpha > r$, где r — любое рациональное число класса A. Таким образом, для любых двух действительных чисел α и β возможно только одно из соотношений: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$.

Если произвести, аналогично выше определенным, сечения в области уже всех действительных чисел, то оказывается, что для любого такого сечения $A|A'$ всегда существует действительное число, его производящее (в этом заключается основная теорема Дедекинда). Это свойство множества всех действительных чисел называют его *полнотой* или *непрерывностью*.

Для действительных чисел вводят понятия *арифметических операций* и *законов* (*сложения*, *умножения*, *деления* на число, отличное от нуля, и т. д.) над ними. Например, под суммой двух действительных чисел α и β понимают такое действительное число $\gamma = \alpha + \beta$, которое удовлетворяет соотношению $a + b < \gamma < a' + b'$, где a, a', b и b' — всевозможные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам: $a < \alpha < a'$, $b < \beta < b'$.

Аналогично вводят и все другие арифметические операции с сохранением основных свойств.

Теория Кантора. Рассматривают всевозможные *фундаментальные последовательности* (см. § 3, п. 2) рациональных чисел. Последовательность рациональных чисел, сходящаяся к рациональному пределу, является фундаментальной. В то же время существуют фундаментальные последовательности рациональных чисел, не имеющие рационального предела, например, последовательность десятичных приближений $\{1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ \ldots\}$ квадратного корня из двух.

Две бесконечные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются *эквивалентными* или *конфинальными*, если $|x_n - y_n|$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Это означает, что две эквивалентные фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ могут иметь лишь один и тот же рациональный предел x при $n \to \infty$. Все эквивалентные между собой фундаментальные последовательности рациональных чисел относят к одному классу — классу эквивалентности, а множество всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел разбивают на классы эквивалентности.

Существуют две возможности: либо имеется рациональное число r — общий предел при $n \to \infty$ всех последовательностей $\{x_n\}$ из одного и того же класса эквивалентности X, либо среди всех рациональных чисел такого числа нет.

В первом случае говорят, что класс эквивалентности X определяет *рациональное число* r; во втором случае говорят, что класс эквивалентности X определяет *иррациональное число* x (которое также считается пределом последовательностей из класса X при $n \to \infty$). Каждый класс эквивалентности определяет действительное (рациональное или иррациональное) число.

Далее вводят *арифметические действия* над всеми действительными числами. Например, под суммой $x+y$ двух действительных чисел x и y понимают то число, которое определяется классом $X+Y$, где X — класс эквивалентности, определяющий число x, а Y — класс эквивалентности, определяющий число y, при этом под суммой $X+Y$ понимают тот класс, куда входят последовательности вида $\{x_n+y_n\}$, где $\{x_n\}$ — любая последовательность из X, а $\{y_n\}$ — из Y. Аналогично определяют и все другие арифметические операции над действительными числами.

Действительное число x называется *положительным* ($x>0$), если в соответствующем классе эквивалентности X существует фундаментальная последовательность положительных рациональных чисел, не сходящаяся к нулю.

Неравенство $\alpha > \beta$ для двух действительных чисел α и β означает, что $\alpha - \beta > 0$.

На множестве всех действительных чисел E_1 можно также определить понятия *фундаментальных последовательностей* и *классов эквивалентностей* для них. Оказывается, что на E_1 все фундаментальные последовательности сходятся (см. § 3, п. 2), поэтому любой класс эквивалентности на E_1 определяет действительное число — общий предел входящих в него последовательностей. При таком пополнении множества E_1 не может быть получено новых чисел; в этом смысле множество E_1 является *полным*.

Таким образом, множество E_1 действительных чисел получается в результате пополнения множества рациональных чисел пределами всевозможных фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Эта идея пополнения приобрела большое значение в функциональном анализе.

Из других теорий иррациональных чисел укажем, кроме теории Вейерштрасса, на обоснование А. Н. Колмогорова (см. [6], стр. 269) и на аксиоматическое построение действительных чисел (см. [4], стр. 157 и [15], стр. 180).

§ 2. Функции. Последовательности

1. Функции одного переменного. Если задано множество действительных чисел $X=\{x\}$ и каждому числу x из X поставлено в соответствие число y, причем $Y=\{y\}$ — множество всех таких чисел y, то говорят, что *задана функция* $y=f(x)$ *на множестве* X. Множество X называется *областью задания* (*определения*) функции $f(x)$, а каждое число x из X — *аргументом*. Множество Y называется *областью значений* функции $f(x)$. Если задан аргумент x, то задано значение $y=f(x)$ функции. Например, для функции $y=x^3$ множества X и Y совпадают со всей действительной прямой E_1; для функции $y=\operatorname{tg} x$ множество Y есть вся числовая прямая E_1, а $X=E_1-M$, где M — есть множество всех чисел вида $\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; для функции $y=x!$ множества Y и X суть множества натуральных чисел; для функции $y=E(x)$ (целой части x) X есть числовая прямая E_1, а Y — множество натуральных чисел. Для функции

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases} -1 & \text{при} \quad x<0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0, \\ 1 & \text{при} \quad x>0 \end{cases}$$

множество X — числовая прямая, а множество Y состоит из трех чисел: -1, 0, 1.

Любое конечное множество чисел $\{a_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ можно рассматривать как функцию, заданную на конечном множестве натуральных чисел $X=\{1, 2, \ldots, n\}$ и относящую каждому из этих чисел i значение функции $f(i)=a_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Понятие функции подверглось широкому обобщению, X может быть множеством произвольных элементов. Говорят, что на этом множестве задана числовая функция, если каждому элементу x этого множества отнесено число $f(x)$.

В гл. II рассматриваются функции, определенные на множестве точек (или векторов) n-мерного пространства. Площадь, ограниченная многоугольником, или его периметр можно рассматривать как функции, определенные на множестве плоских многоугольников; такие физические величины, как масса тела, его заряд и т. п., определены на множестве соответствующих физических тел и т. д.

Элементы множества X, на котором определена функция, называются иногда «*точками*».

2. Верхняя и нижняя границы функции. Верхняя (нижняя) граница функции $f(x)$, определенной на множестве X, есть число $M(m)$ такое, что $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$) для всех x из множества X. Если это число существует, то функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*) *на* X. Функция, ограниченная на X сверху и снизу, называется *ограниченной на* X.

Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) границ функции $f(x)$ называется *точной верхней* (*нижней*) *границей* или *гранью* $M^*(m^*)$ функции $f(x)$ и обозначается

$$M^* = \sup_{x \in X} f(x) \qquad \left(m^* = \inf_{x \in X} f(x)\right).$$

Если существует такой элемент x_0 (x_1) из X, для которого

$$f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x) \qquad \left(f(x_1) = \inf_{x \in X} f(x)\right),$$

то

$$\sup_{x \in X} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\inf_{x \in X} f(x) = f(x_1)\right)$$

называется *абсолютным максимумом* (*минимумом*) *функции* $f(x)$ и обозначается

$$f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x) \equiv \max_{x \in X} f(x) \qquad \left(f(x_1) = \inf_{x \in X} f(x) \equiv \min_{x \in X} f(x)\right).$$

Относительно функции $f(x)$ в этом случае говорят, что она *достигает своего абсолютного максимума* (*минимума*) *в точке* x_0 (x_1).

Для конечного множества $\{a_1, a_2, \quad a_n\}$ через

$$\max_n \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \qquad \left(\min_n \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\right)$$

обозначают *наибольшее* (*наименьшее*) из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Например,

$$\inf_{x\in(0,\infty)} \frac{1}{x}=0, \quad \min_{x\in E_1} \sin x=-1, \quad \max_{x\in E_1} \sin x=1,$$

$$\max\{4, 3, 7, 11, 8\}=11, \quad \min\{4, 3, 2, 10, 17\}=2.$$

Имеют место неравенства:

1) $$\sup_{x\in X} f(x)+\sup_{x\in X} f_1(x)\geqslant \sup_{x\in X}(f(x)+f_1(x)), \tag{1.3}$$

$$\inf_{x\in X} f(x)+\inf_{x\in X} f_1(x)\leqslant \inf_{x\in X}(f(x)+f_1(x)). \tag{1.4}$$

Если $f(x)$, $f_1(x)$ и $f_1(x)+f(x)$ достигают максимума (минимума) на X, то

$$\max_{x\in X} f(x)+\max_{x\in X} f_1(x)\geqslant \max_{x\in X}(f(x)+f_1(x)), \tag{1.3a}$$

$$\min_{x\in X} f(x)+\min_{x\in X} f_1(x)\leqslant \min_{x\in X}(f(x)+f_1(x)). \tag{1.4a}$$

Случай равенства в (1.3а) (соответственно в (1.4а)) имеет место, когда $f(x)$ и $f_1(x)$ достигают максимума (минимума) в одной и той же точке.

Например,

$$\max_{x\in E_1} \sin x+\max_{x\in E_1} \cos x=2>\max_{x\in E_1}(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}.$$

2) Если $Y\subset X$ (множество Y есть часть множества X), то

$$\sup_{y\in Y} f(y)\leqslant \sup_{x\in X} f(x), \quad \inf_{y\in Y} f(y)\geqslant \inf_{x\in X} f(x).$$

Например,

$$\max_{x\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}<\max_{x\in E_1} \sin x=1,$$

$$\max(3, 11, 15, 8)=15>\max(3, 11, 8)=11.$$

Часто пользуются следующими обозначениями:

$$(f(x)=a), \quad (f(x)<a), \quad (f(x)\leqslant a), \quad (f(x)>a), \quad (f(x)\geqslant a)$$

и тому подобными, означающими множества точек x, для которых удовлетворяются соответствующие неравенства (они называются лебеговскими множествами).

Например, $(x^2<2)$ есть интервал $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $(\sin x=1)$ есть множество чисел $\left\{(4n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, где n — любое целое число.

3. Четные и нечетные функции. Будем рассматривать функции, определенные на всей числовой прямой или на отрезках $[-a, a]$ и интервалах $(-a, a)$ (вообще на множестве M, симметричном относительно начала координат).

Функция $f(x)$ называется *четной*, если для любого x из области ее определения имеет место равенство $f(-x)=f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x)=-f(x)$. Все четные степени x^{2n} являются четными функциями, а нечетные x^{2n+1} — нечетными функциями. Другими примерами четных функций являются $\cos x$, $|x|$, а нечетных — $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и т. д.

Сумма четных функций — четная, нечетных — нечетная. Произведение четных функций — четная функция, произведение четного числа нечетных функций есть четная функция, нечетного их числа — нечетная. Например, $\sin x \cdot \operatorname{tg} x$ — четная функция, $x \cdot \sin x \cdot \operatorname{tg} x$ — нечетная. Произведение (и частное) четной и нечетной функций — нечетная функция. Например, $|x| \sin x$ — нечетная функция.

Константа является четной функцией.

Любая функция от четной функции есть четная функция, например, $e^{|x|}$, $\sin(\cos x)$ — четные функции. Четная функция от нечетной функции есть четная функция, например, $\cos(\sin x)$. Нечетная функция от нечетной функции есть нечетная функция, например, $\operatorname{tg}(\sin x)$.

Любая функция $f(x)$ представима в виде суммы четной функции $f_1(x)$ и нечетной $f_2(x)$:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

где

$$f_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\cancel{C},$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]-\cancel{C}$$

$C =$

(C — постоянная).

4. Обратные функции. Если даны множества X и Y, причем каждому элементу x из X отнесен некоторый элемент $y = A(x)$ из Y, то говорят, что дано *отображение* (или *соответствие*) A множества X в множество Y.

Если $y = A(x)$, то $y \in Y$ называется *образом* элемента $x \in X$, а x — *прообразом* y.

Если каждому $y \in Y$ отвечает в качестве прообраза единственный элемент $x \in X$, то отображение (соответствие) A называется ~~*взаимно однозначным отображением*~~ X *в* Y.

Пример 1. Пусть все дома некоторой улицы перенумерованы натуральными числами от 1 до 80. Мы имеем взаимно однозначное соответствие между множеством домов и множеством первых 80 натуральных чисел.

Пример 2. Пусть E' — множество всех не равных нулю действительных чисел; каждому числу x из E' отвечает один из двух знаков $+$ или $-$. Мы имеем отображение E' в множество знаков, состоящее из двух элементов; прообразами знаков $+$ $(-)$ являются все положительные (отрицательные) числа.

Пусть множества X и Y суть некоторые множества числовой прямой E_1; отображение $A \equiv f(x)$ множества X в Y есть некоторая функция $y = f(x)$, определенная на множестве X с областью значений Y.

Если функция $y = f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение множества X в множество Y, то говорят, что у функции $f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая отображает множество Y в множество X. Множество Y для функции $x = \varphi(y)$ является областью определения, а множество X — областью ее значений.

Пример 3. $y = \sin x$, $\quad x = \arcsin y$, $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 4. $y = \operatorname{tg} x$, $\quad x = \operatorname{arctg} y$, $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 5. $y = e^{kx} (k \neq 0)$, $x = \frac{1}{k} \ln y$, $X = E_1$.

5. Периодические функции. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $\omega > 0$, что для любого x справедливо равенство

$$f(x + \omega) = f(x). \tag{1.5}$$

Число ω называется *периодом* функции $f(x)$. Если ω_1 и ω_2 — периоды функции $f(x)$, то $\omega_1+\omega_2$ тоже период $f(x)$.

Наименьшее из всех таких положительных чисел ω называется *наименьшим периодом* (или просто *периодом*) функции $f(x)$.

Теорема 1. *Если непрерывная* (см. § 3, п. 11) *функция $f(x)$ — периодическая, отличная от константы, то у нее существует наименьший период $\omega_0>0$, и все остальные ее периоды ω являются кратными ω_0.*

Например, для функции $f(x)=\sin x$ имеем $\omega_0=2\pi$, для $f(x)=|\sin x|$ период $\omega_0=\pi$, а для $f(x)=E(x)$ (см. § 2, п. 1) период $\omega_0=1$.

6. Функциональные уравнения. *Функциональным уравнением* называется равенство, связывающее разные значения функций; о функции, для которой такое равенство выполняется, говорят, что она является *решением* этого функционального уравнения, или, что для нее функциональное уравнение выполняется.

Пример 6. Решениями функционального уравнения

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1.6}$$

служат линейные функции

$$f(x)=kx \quad (k \text{ — постоянная}).$$

Можно показать, что они являются единственными непрерывными функциями, удовлетворяющими этому функциональному уравнению.

Пример 7. Решениями функционального уравнения

$$f(x)\cdot f(y)=f(x+y) \tag{1.7}$$

служат показательные функции $a^x\,(a\geqslant 0)$, причем они являются единственными непрерывными функциями, удовлетворяющими данному функциональному уравнению.

Заметим, что периодические функции удовлетворяют функциональному уравнению

$$f(x+\omega)=f(x).$$

Можно также рассматривать системы функциональных уравнений. Так, например, пара функций

$$f(x)=\sin x, \quad \varphi(y)=\cos y$$

(и функций $f(x) \equiv 0$, $\varphi(x) \equiv 0$) являются единственными непрерывными решениями системы функциональных уравнений:

$$f(x+y) = f(x)\varphi(y) + f(y)\varphi(x),$$
$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) - f(x)f(y),$$

если дополнительно потребовать положительности этих функций в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и выполнения условий $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

7. Последовательности чисел. Бесконечной числовой *последовательностью* называется функция, определенная на множестве натуральных чисел: *каждому натуральному числу* n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *отвечает число* x_n — *n-й член последовательности* $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Число n в выражении x_n называется *индексом* (*номером*). Иногда рассматривают последовательности $\{x_n\}$, где n принимает не только натуральные значения, но и $n = 0$ или значения любых целых чисел.

Будем говорить, что при $m > n$ член x_m *следует* за членом x_n (x_n *предшествует* x_m) независимо от того, каковы сами числа x_n и x_m по величине. Последовательность считается заданной, если известен закон образования членов последовательности. Часто удается найти выражение (формулу) для *общего члена* x_n последовательности.

Пример 8. *Арифметическая прогрессия*

$$x_n = a + (n-1)d.$$

Пример 9. *Геометрическая прогрессия*

$$x_n = aq^{n-1}.$$

Пример 10. Десятичные приближения по недостатку (избытку) числа $\pi = 3{,}14159265\ldots$:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 3{,}1; \quad x_3 = 3{,}14; \quad x_4 = 3{,}141; \ldots$$

Пример 11. Пусть в десятичной системе задано число $n = a_1 a_2 \ldots a_k$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — цифры; тогда числа $x_n = 0{,}a_1 a_2 \ldots a_k$ и $y_n = 0{,}a_k a_{k-1} \ldots a_1$ образуют числовые последовательности при $n = 1, 2, \ldots$ Например, при

$$n = 15 \text{ имеем } x_{15} = 0{,}15; \quad y_{15} = 0{,}51.$$

Пример 12. Разложим натуральное число n на простые множители:

$$n = p_1^{2l_1} \cdot p_2^{2l_2} \ldots p_k^{2l_k} \cdot p_{k+1}^{2l_{k+1}+1} \ldots p_m^{2l_m+1}$$

и определим последовательность $\{x_n\}$ следующим образом:

$$x_n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \ldots p_k^{l_k} \cdot p_{k+1}^{-(l_{k+1}+1)} \ldots p_m^{-(l_m+1)}$$

при $n = 1, 2, 3,$

Например, $n = 18 = 2^1 \cdot 3^2$, $x_{18} = 3 \cdot 2^{-1} = \frac{3}{2}$.

Можно рассматривать не только числовые последовательности, а также последовательности векторов, функций и т. д.

8. Верхняя и нижняя границы последовательности. Последовательность $X = \{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* числом M, если $x_n \leqslant M$ для всех номеров n. В соответствии с определением, данным в § 1, п. 5, число M называется *верхней границей* последовательности $\{x_n\}$. Последовательность $X = \{x_n\}$ называется *ограниченной снизу* числом m, если $x_n \geqslant m$ для всех x_n из X. Число m называется *нижней границей* последовательности $\{x_n\}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу.

Наименьшее M^* (наибольшее m^*) из всех верхних M (нижних m) границ называется *точной верхней* (*нижней*) *границей* последовательности $\{x_n\}$ и обозначается, по-прежнему, через

$$\sup_n x_n = M^* \quad \text{и} \quad \inf_n x_n = m^*.$$

Для точной верхней и нижней границ последовательности $\{x_n\}$ справедливы предложения, указанные в § 2, п. 2.

9. Наибольший член последовательности. Иногда для последовательности $\{u_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ требуется найти $\max\limits_k u_k$ — *наибольший член последовательности* $\{u_k\}$, если такой член существует; обозначим его через μ

$$\mu = \max_k u_k.$$

Номер (индекс) максимального члена последовательности $\{u_k\}$ называют *центральным* индексом и обозначают через ν. Если среди чисел u_k есть несколько равных числу μ, то за число ν принимают наибольший из индексов этих чисел.

Если $u_n = u_n(x)$ суть функции x, $x \in X \subset E_1$, то $\nu = \nu(x)$, $\mu = \mu(x)$ суть также функции x.

Пример 13. Для последовательности $\left\{u_k(x) = \frac{x^k}{k!}\right\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ число $\nu(x) = E(x) = n$, а максимальный член $\mu(x) = \frac{x^n}{n!}$ — для нецелых x; если же x — целые, $x = m$, то $\nu(x) = m$, а $\mu(x) = u_{m-1} = u_m$. Например, при $x = 6$ имеем $\nu(6) = 6$, $\mu(6) = u_5 = \frac{6^5}{5!} = u_6 = \frac{6^6}{6!}$.

Пример 14. Для последовательности $\left\{u_k(x) = \frac{x^k}{(2k+1)!}\right\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ индекс максимального члена определяется неравенством

$$2n(2n+1) \leqslant x \leqslant (2n+2)(2n+3),$$

при фиксированном $x > 0$ максимальный член u_n отвечает значению $n = E(x)$.

10. Монотонные последовательности. Последовательность $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*), если

$$\left.\begin{array}{c} x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \\ (x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots), \end{array}\right\} \qquad (1.8)$$

и *неубывающей* (*невозрастающей*), если

$$\left.\begin{array}{c} x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots \\ (x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots). \end{array}\right\} \qquad (1.9)$$

Последовательности вида (1.8) и (1.9) называются *монотонными*, а последовательности вида (1.8) — *монотонными в строгом смысле* (или *строго монотонными*). Например, последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^{\frac{n}{3}} + \frac{1}{3}}, \quad x_n = 5 - \frac{1}{3^{n-1}}, \quad x_n = 2 + 5(n-1)$$

— монотонно возрастающие в строгом смысле; последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$

— монотонно убывающие в строгом смысле; последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{1}{4}, \quad x_5 = \frac{1}{4},$$

— невозрастающая; последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 3, \quad x_6 = 4,$$

— неубывающая.

Все указанные здесь последовательности являются монотонными.

11. Двойные последовательности. *Двойной последовательностью* $\{a_{nm}\}$ называется функция от пары целочисленных индексов n и m: каждой паре целых чисел n и m отвечает число a_{nm} — член последовательности $\{a_{nm}\}$.

Пример 15. $\left\{a_{nm} = \frac{1}{n^2 + m^2}\right\} \quad (n, \ m = 1, 2, \ldots)$.

Если в десятичной системе числа n и m изображаются так:

$$\left.\begin{aligned} n &= a_k a_{k-1} \ldots a_1, \\ m &= b_k b_{k-1} \ldots b_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

(можно считать, что n и m изображаются одинаковым числом цифр, этого всегда можно добиться, поставив впереди соответствующее число нулей), то можно построить двойную последовательность $\{N_{nm}\}$, где

$$N \equiv N_{nm} = a_k b_k a_{k-1} b_{k-1} \ldots a_1 b_1. \tag{1.11}$$

Пример 16. Если $n = 103$, $m = 27 = 027$, то $N_{103,27} = 100\,237$.

Обратно, каждому целому числу N, изображаемому правой частью (1.11) (если у N число цифр нечетное $(2k - 1)$, то добавим впереди цифру $a_{2k} = 0$), можно поставить в соответствие пару целых чисел n и m по формуле (1.10).

Таким образом получаем взаимно однозначное соответствие между множеством пар целых чисел и множеством всех неотрицательных целых чисел.

Пример 17. Пусть дана двойная последовательность $\{a_{nm}\}$ $(n, \ m = 0, 1, 2, \ldots)$; ей можно отнести обычную последовательность $\{b_N\}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$, именно: при $N = N_{nm}$ имеем $b_N = a_{nm}$.

Говорят, что двойная последовательность $\{a_{nm}\}$ расположена в виде обычной последовательности $\{b_N\}$.

О суммировании двойных последовательностей (о двойных рядах) см. главу III.

§ 3. Предельный переход

1. Предельная точка множества. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества X, если в любой ε-окрестности точки x_0 найдется еще по крайней мере одна точка множества X, отличная от точки x_0 ($\varepsilon > 0$ — произвольное число). Или, x_0 есть *предельная точка* множества X, если в любой ее ε-окрестности содержится бесконечно много точек множества X. Предельных точек у множества может быть не одна (даже бесконечно много), и они могут не принадлежать множеству X. Например, множество $X=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ при $n \geqslant 1$ имеет одну предельную точку 0, которая не принадлежит этому множеству; каждая точка любого интервала (a, b) (а также точки a и b) является предельной для него.

Теорема 2 (Больцано — Вейерштрасса). *Всякое ограниченное бесконечное множество X из E_1 имеет хотя бы одну предельную точку.*

Множество M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Например, $M=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ — замкнутое множество; любой отрезок $[a, b]$ — замкнутое множество.

Множество M в E_1 называется *открытым* или *областью*, если любая его точка входит в M вместе со своей ε-окрестностью.

Например, любой интервал (α, β) — открытое множество, любая система интервалов есть открытое множество.

Вся действительная прямая является открытым и замкнутым множеством; наоборот, любой полуинтервал $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ не замкнутое и не открытое множество.

Дополнение открытого (замкнутого) множества M до E_1 является замкнутым (открытым) множеством.

Например, дополнение к открытому множеству $(-\infty, 0) \cup \cup (1, +\infty)$ есть замкнутое множество $[0, 1]$.

2. Предельная точка и предел последовательности. Число x называется *предельной точкой последовательности* $X = \{x_n\}$, если в любой ε-окрестности точки x найдется по крайней мере один член x_m последовательности X, отличный от точки x (а значит и бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$).

Ограниченная бесконечная последовательность $X = \{x_n\}$ имеет хотя бы одну предельную точку.

Постоянное число x_0 называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, как бы оно мало ни было, найдется такой номер N (зависящий только от выбора числа ε), что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_0| < \varepsilon.$$

В этом случае говорят, что $\{x_n\}$ *имеет конечный предел* x_0 и пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ (limes — предел), или $\{x_n\}$ *сходится* к x_0 и пишут $x_n \to x_0$. Последовательность $\{x_n\}$ называется в этом случае *сходящейся*. Геометрически это означает, что для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера N_ε, все точки x_n попадут в окрестность $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. В частности, x_n называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Последовательность $\{x_n\}$, обладающая тем свойством, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $m > N$, $n > N$ имеет место неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$, называется *фундаментальной*.

Общим критерием сходимости последовательности $\{x_n\}$ является

Критерий Больцано — Коши. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Говорят, что предел последовательности $\{x_n\}$ равен бесконечности:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty,$$

если для любого сколь угодно большого числа $K > 0$ найдется такой номер N, что при $n > N$ имеет место неравенство

$$|x_n| > K.$$

Если при этом числа x_n $(n > N)$ положительные (отрицательные), то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right).$$

Некоторые пределы.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_n}{bn^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_n} = \dfrac{a}{b}$ $\qquad (b \neq 0)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n}{2} = \sqrt{ab}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $\qquad$ при $\qquad a > 1$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ $\qquad$ (см. (6.36)).

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}} = \dfrac{e}{4}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1$.

8. Для $p > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n}{p-1} - \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{n}{n+2}\right)^p + \ldots \right] \right\} = \frac{1}{2}.$$

9. Для $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1} - 2^{\alpha-1} + 3^{\alpha-1} - 4^{\alpha-1} + \ldots + (-1)^{n-1} n^{\alpha-1}}{n^\alpha} = 0.$$

10. Если обозначить

$$A_n = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1} \quad \text{и} \quad G_{n-1} = \sqrt[n]{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}},$$

то при $a_k = C_n^k$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} = 2, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{G_n} = \sqrt{e}.$$

11. Если для A_n и G_n сохранить обозначения, введенные выше, то при $a_k = a + kd$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $a > 0$, $d > 0$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{G_n}{A_n} = \frac{2}{e}.$$

3. Основные теоремы о пределах. 1°. *Последовательность может иметь только один предел.*

2°. *Если последовательность имеет конечный (бесконечный) предел, то она ограниченная (неограниченная).*

3°. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *имеет единственную предельную точку* x_0, *то последовательность* $\{x_n\}$ *сходится и* x_0 *есть ее предел.* Обратно, *если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к* x_0, *то* x_0 *есть единственная ее предельная точка.*

4°. *Если* x *есть предельная точка последовательности* $\{a_n\}$, *то существует подпоследовательность* $\{a_{n_k}\}$, *сходящаяся к* x. Обратно, *если* y *есть предел некоторой подпоследовательности* $\{a_{n_k}\}$, *то* y *есть предельная точка последовательности* $\{a_n\}$.

5°. Аналогично, *если* x *есть предельная точка множества* M *числовой прямой* E_1, *то* M *содержит последовательность* $\{x_n\}$ *чисел, отличных от* x, *сходящуюся к* x.

6°. *Предполагая, что существуют* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ *и* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$, *имеем*:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \pm \lim_{n \to \infty} y_n,$$

$$\lim_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \cdot \lim_{n \to \infty} y_n,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} x_n}{\lim\limits_{n \to \infty} y_n}, \quad \text{где } \lim_{n \to \infty} y_n \neq 0;$$

если $x_n < y_n$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} x_n \leqslant \lim_{n \to \infty} y_n.$$

4. Некоторые предложения о пределах. 1°. *Если* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ *и все* $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

2°. *Если A — наибольшее из чисел*

$$a_1,\ a_2,\qquad a_n\ (a_i \geqslant 0)$$

и

$$p_i > 0\ (i = 1,\ 2,\ 3,\qquad n),$$

то

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{p_1a_1^m + p_2a_2^m + \qquad + p_na_n^m} = A,$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{p_1a_1^{m+1} + p_2a_2^{m+1} + \ldots + p_na_n^{m+1}}{p_1a_1^m + p_2a_2^m + \qquad + p_na_n^m} = A.$$

3°. *Если для последовательности $\{a_n\}$ существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \bar{a}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a,$$

то

$$\bar{a} = a.$$

4°. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_0 + p_1 + \ldots + p_n} = 0,\quad p_i > 0,$$

и существует предел s_n, равный s при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0p_n + s_1p_{n-1} + s_2p_{n-2} + \ \ldots\ + s_np_0}{p_0 + p_1 + p_2 + \qquad + p_n} = s.$$

5. Верхний и нижний пределы последовательности. *Верхний (нижний) предел последовательности* $\{x_n\}$ есть точная верхняя (нижняя) граница множества чисел, предельных для этой последовательности, и обозначается так:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \qquad (\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n).$$

Например,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]=1,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]=-1,$$

в то время как

$$\sup_{n=1,2,\ldots}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]=\frac{3}{2},$$

$$\inf_{n=1,2,\ldots}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]=-1.$$

Каждая ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.

Если последовательность сходится, то ее предел совпадает с ее верхним и нижним пределами; если верхний и нижний пределы совпадают, то последовательность сходится к их общему значению.

Для любой последовательности, имеющей верхний и нижний пределы, легко построить монотонные последовательности, сходящиеся, соответственно, к верхнему и нижнему пределам: к нижнему — монотонно невозрастающую $\{x_{*n}\}$, — к верхнему — монотонно неубывающую $\{x_n^*\}$:

$$x_n^*=\sup\{x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots\},$$

$$x_{*n}=\inf\{x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots\},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_n^*,\qquad \varliminf_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{*n}.$$

Если $\{x_n\}$ — монотонно неубывающая (невозрастающая) последовательность и $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, то $x_n^*=x_n$, $x_{*n}=a$ $(x_n^*=a,\ x_{*n}=x_n)$.

6. Равномерно распределенные последовательности. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расположена на отрезке $[a, b]$.

Обозначим через $N_n(\alpha, \beta)$ число тех точек x_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, которые расположены в интервале $(\alpha, \beta)\subset[a, b]$. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(\alpha, \beta)}{n}=\sigma=\beta-\alpha,$$

каков бы ни был интервал $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *равномерно распределенной на отрезке* $[a, b]$.

Пример 18. Последовательность $\{y_n\}$ примера 11 (см. § 2, п. 7) есть равномерно распределенная на $[0, 1]$ последовательность.

Пример 19. Последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = an^\sigma - [an^\sigma], \quad a > 0, \ 0 < \sigma < 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

($[x]$ — целая часть x) — равномерно распределена на $[0, 1]$.

Пример 20. Последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = a(\ln n)^\sigma - \left[a(\ln n)^\sigma\right], \quad a > 0, \ \sigma > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

— равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.

Равномерно распределенные последовательности имеют применение при численном интегрировании. Очевидно, все внутренние точки отрезка $[a, b]$ — предельные для $\{x_n\}$, кроме того,

$$a = \varliminf_{n \to \infty} x_n, \quad b = \varlimsup_{n \to \infty} x_n.$$

Для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ и равномерно распределенной на $[a, b]$ последовательности $\{x_n\}$ справедливо соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Обратно, если это равенство выполняется для всех непрерывных на $[a, b]$ функций, то последовательность $\{x_n\}$ — равномерно распределенная.

7. Рекуррентные последовательности. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ задана *рекуррентной* формулой, если задано несколько ее первых членов и известна функция, с помощью которой x_n выражается через предыдущие члены:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \quad x_{n-p}), \qquad p \geqslant 1 \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Например, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ $(n = 3, 4, \ldots)$.

Сама последовательность называется иногда *рекуррентной* (или *возвратной*).

Простейшим примером рекуррентной последовательности является *итерационная последовательность* $\{x_n\}$:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Последовательности итерационные, а также вообще рекуррентные, имеют большое применение в приближенных методах. Например, в методе последовательных приближений и методе Ньютона.

а) Метод последовательных приближений для решения уравнения $x = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, приводит к итерационной последовательности $\{x_n\}$:

$$x_{k+1} = f\{x_k\} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где за x_0 принимают некоторое произвольное число. Тогда оказывается, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится к $\bar{x}$, то $\bar{x}$ есть решение уравнения: $\bar{x} = f(\bar{x})$.

б) Метод Ньютона (касательных) для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$, $f(x)$ — дифференцируемая функция, также приводит к итерационной последовательности $\{x_n\}$:

$$x_{k+1} = \frac{f'(x_k)\,x_k - f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где за x_0 принимают некоторое число; тогда, если $\{x_n\}$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ есть искомый корень, т. е. $f(\bar{x}) \equiv 0$.

(Достаточное условие сходимости последовательности $\{x_n\}$, указанной в методе а), см. выше.)

8. Символы $o(\alpha_n)$ и $O(\alpha_n)$. Переменная величина, принимающая некоторую последовательность $\{\alpha_n\}$ значений, называется *вариантой*. Например, переменный член любой прогрессии является вариантой.

Если даны варианты α_n и β_n, а их отношение $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ стремится к нулю при $n \to \infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0\right)$, то говорят, что $\alpha_n(\beta_n)$ есть *бесконечно малая (большая) величина* по сравнению с $\beta_n(\alpha_n)$ и символически записывают:

$$\alpha_n = o(\beta_n).$$

Например, $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n = o(n^2)$.

Если α_n, β_n — бесконечно малые величины и $\alpha_n = o(\beta_n)$, то говорят, что α_n (β_n) есть *бесконечно малая высшего* (*низшего*) *порядка* по сравнению с β_n (α_n), или α_n (β_n) *убывает быстрее* (*медленнее*), чем β_n (α_n). Если α_n, β_n — бесконечно большие величины и $\alpha_n = o(\beta_n)$, то говорят, что α_n (β_n) *растет медленнее* (*быстрее*), чем β_n (α_n).

Если $|\alpha_n| \leqslant C|\beta_n|$, $C > 0$ (C — постоянная), то говорят, что β_n *убывает не быстрее* α_n или α_n *растет не быстрее* β_n, и символически записывают:

$$\alpha_n = O(\beta_n).$$

В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = C \neq 0$, то $\alpha_n = O(\beta_n)$ или $\beta_n = O(\alpha_n)$.

Например, $n = O\left(\sqrt{n^2+1}\right)$.

Равенство

$$\alpha_n = O(1)$$

означает, что последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена, т. е. что $|\alpha_n| \leqslant C$ при всех n.

Теорема 3. *Пусть дана произвольная последовательность* $\{X_n\} = \{x_m^n\}$ *следующих последовательностей*:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x_1^1,\ x_2^1,\ x_3^1,\ \quad x_m^1,\ \ldots\},\\ X_2 &= \{x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ \quad x_m^2,\ \ldots\},\\ &\ldots\\ X_n &= \{x_1^n,\ x_2^n,\ x_3^n,\ \ldots,\ x_m^n,\ \ldots\}, \end{aligned}$$

Тогда существует последовательность чисел $X = \{x_k\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, *быстрее возрастающая* (*быстрее убывающая*), *чем любая из этих последовательностей* $\{x_m^n\}$.

Например, если $X_n = \{n^m\} = \{n^1, n^2, n^3, \ldots, n^m, \ldots\}$, то последовательность $X = \{m!\} = \{1!, 2!, 3!, \ldots, m!, \ldots\}$ возрастает быстрее любой последовательности $\{X_n\}$: $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{n^m}{m!} = 0$ при любом n.

9. Предел функции. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X. Тогда говорят, что число A

есть *предел* функции $f(x)$ при $x \to x_0$:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

или что $f(x)$ стремится к A при $x \to x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ из X, сходящейся к x_0 ($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A. Или, иначе, число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$:

$$A = \lim_{x \to x_0,\ x \in X} f(x) \qquad (f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to x_0),$$

если для любого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется, как только $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in X$. Например,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = 0 \quad \text{для любого } \alpha > 0.$$

10. Непрерывность функции справа и слева. Будем рассматривать функции $y = f(x)$, определенные на множествах X из E_1; обычно это следующие множества:

$$[a, b],\ (\alpha, \beta),\ [a, b),\ (\alpha, \beta],\ (-\infty, +\infty),\ (-\infty, 0],$$
$$[0, +\infty),\ (-\infty, 0),\ (0, +\infty)$$

и т. д.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (x_0, a). Говорят, что число $A = f(x_0 + 0)$ есть *предел функции* $f(x)$ *справа в точке* $x = x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ из (x_0, a), сходящейся к x_0, $f(x_n)$ сходится к A. Аналогично определяется в точке $x = x_0$ *предел слева* $f(x_0 - 0) = B$ для функции $f(x)$, определенной на некотором интервале (b, x_0). Например, для функции $y = E(x)$ (см. § 2, п. 1) и для целого аргумента $x = n$ имеем: $E(n - 0) = n - 1$, $E(n + 0) = n$. Для аргумента $x_0 = 0$ пределы слева и справа функции $f(x)$ обозначаются соответственно $f(-0)$ и $f(+0)$. Например, если $f(x) = \operatorname{sign} x$ (см. § 2, п. 1), то $f(-0) = -1$, $f(+0) = +1$.

Функция $f(x)$, определенная в точке $x = x_0$, *непрерывна* в ней *справа* (*слева*), если существует $f(x_0 + 0)$ ($f(x_0 - 0)$), равное $f(x_0)$.

11. Непрерывные функции. Разрывные функции. Если

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0), \tag{1.12}$$

то функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x=x_0$. Если $f(x)$ не определена на интервале (b, x_0) или (x_0, a), то в равенстве (1.12) отбрасывается левый или, соответственно, правый член. См. также стр. 76. Если функция $f(x)$, определенная на множестве X, непрерывна в каждой точке x из X, то она называется *непрерывной* на множестве X.

Например, $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна для всех $x\geqslant 0$.

В противном случае функция $f(x)$ называется *разрывной*. Говорят, что в точке $x=x_0$ функция $f(x)$ имеет *разрыв первого рода* или *скачок*, если существуют $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, но не выполняется равенство (1.12). Во всех остальных случаях разрыва функции точка $x=x_0$ называется *точкой разрыва второго рода*. Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{для} \quad |x|<1, \\ +1 & \text{для} \quad |x|\geqslant 1 \end{cases}$$

имеет разрыв первого рода в точках $x_1=-1$ и $x_2=+1$.

Часто рассматривают функции $y=f(x)$, которые в точке разрыва первого рода $x=x_0$ равны среднему арифметическому значению:

$$f(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Например, для функции $f(x)=\operatorname{sign} x$ (см. § 2, п. 1):

$$f(0)=\frac{f(-0)+f(+0)}{2}.$$

Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве X, если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для *любой* пары значений $x', x''\in X$, для которых $f(x)$ имеет смысл, из $|x'-x''|<\delta$ следует $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на ограниченном отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке (*теорема Кантора*).

12. Последовательности функций. В анализе большую роль играют последовательности функций $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$, определенных на некотором множестве X

числовой прямой E_1. Можно по-разному определять предельный переход для таких последовательностей. Естественно начать с предельного перехода в каждой точке, когда для любого фиксированного x из X последовательность $\{f_n(x)\}$ превращается в числовую последовательность. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ для любого x из X, то ее предел зависит от точки $x \in X$, т. е. является функцией $f(x)$ (*предельная функция*), и это записывается так:

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in X.$$

Пример 21.

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{при} \quad x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Этот пример показывает, что предел непрерывных функций может быть разрывной функцией.

В результате двойного предельного перехода можно получить в пределе функции, обладающие еще более сложными разрывами, например,

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} (\cos 2\pi m!\, x)^n = \chi(x),$$

где $\chi(x)$ — *функция Дирихле*:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное}, \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональнсе}. \end{cases}$$

Замечание. Наряду с последовательностями функций в анализе часто встречаются последовательности чисел, зависящие от функций (*функционалы*). Пределами таких последовательностей определяются, например, *средние значения функций*.

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f_{\nu n} = f(a + \nu\delta_n)$, $\delta_n = \frac{b-a}{n}$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_{kn} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

есть *среднее арифметическое* функции $f(x)$ на $[a, b]$;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\dots f_{nn}} = \exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right\}$$

— *среднее геометрическое* функции $f(x)$ на $[a, b]$,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f_{kn}}\right)^{-1} = (b-a)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)^{-1}$$

— *среднее гармоническое* функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Справедлива также следующая

Теорема 4. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и положительны на $[a, b]$, то*

1) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b g(x)[f(x)]^n\,dx} = \max_{x\in[a, b]} f(x),$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b g(x)[f(x)]^{n+1}\,dx}{\int_a^b g(x)[f(x)]^n\,dx} = \max_{x\in[a, b]} f(x).$$

13. Равномерная сходимость функций. Исключительно большую роль в анализе играет понятие *равномерно сходящейся последовательности функций* $\{f_n(x)\}$.

Определение. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определенных на множестве $X\subset E_1$, *сходится* при $n\to\infty$ *равномерно* к функции $f(x)$, определенной тоже на множестве X, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ можно найти такое целое число $N=N(\varepsilon)$, не зависящее от $x\in X$, что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{1.13}$$

Если $\{f_n(x)\}$ сходится при $n\to\infty$ в каждой точке $x\in X$, но не выполняется условие равномерности (1.13), то говорят, что $\{f_n(x)\}$ *сходится неравномерно* к функции $f(x)$ на множестве X. При неравномерной сходимости число N

зависит не только от выбора числа ε, но и от числа $x \in X$:

$$N = N(\varepsilon, x).$$

Теорема 5. *Если все функции $f_n(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящейся при $n \to \infty$ равномерно к $f(x)$ на X, непрерывны, то предельная функция $f(x)$ также непрерывна на X.*

Отсюда следует, что если предельная функция разрывна, то сходимость при $n \to \infty$ последовательности $\{f_n(x)\}$ неравномерная.

Пример 22. Последовательность $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ сходится при $n \to \infty$ равномерно к $f(x) = 0$ на любом отрезке $[0, q]$, $0 < q < 1$; на отрезке $[0, 1]$ эта последовательность сходится неравномерно к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

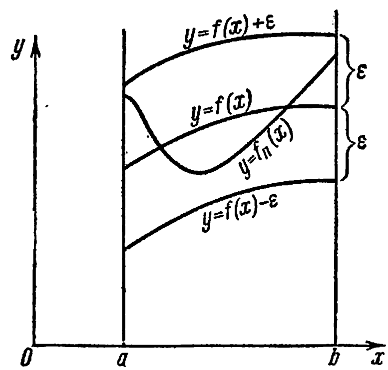

Рис. 1.

Критерий Коши. Для того чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определенных на множестве $X \subset E_1$, сходилась равномерно при $n \to \infty$ к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, зависящий только от ε, что $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ для всех x из X, как только $n > N$ и $m > N$.

Геометрическое истолкование равномерной сходимости. Пусть $f_n(x)$—непрерывные функции на $[a, b]$ и пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ равномерно к функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$. Тогда все кривые $y = f_n(x)$ при $n > N$ попадут в ε-окрестность кривой $y = f(x)$ (см. рис. 1), а именно, будут заключены в полосе между кривыми $y = f(x) - \varepsilon$ и $y = f(x) + \varepsilon$.

14. Сходимость в среднем. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ *сходится* при $n \to \infty$ *в среднем* на отрезке $[a, b] \subset E_1$ к функции $f(x)$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > N$ имеет место неравенство

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon$$

(предполагается, что этот интеграл существует).

Сходимость в среднем часто применяется в различных разделах анализа, например, в приближенных методах анализа.

Обобщением сходимости в среднем является *сходимость, определяемая нормой пространства* (см. гл. II, § 1, п. 2).

15. Символы $o(x)$ и $O(x)$. Если для двух функций $x(t)$ и $y(t)$, определенных на множестве X, их отношение $\frac{x(t)}{y(t)}$ стремится к нулю при $t \to a \in X$ $\left(\lim\limits_{t \to a} \frac{x(t)}{y(t)} = 0\right)$, то говорят, что $x(t)$ ($y(t)$) есть *бесконечно малая* (*большая*) *величина по сравнению с* $y(t)$ ($x(t)$) и символически записывают:

$$x(t) = o(y(t)).$$

Например, $t^2 = o(\sin t)$ при $t \to 0$, $t^n = o(e^t)$ при $t \to \infty$ и любом $n > 0$.

Если $x(t)$ и $y(t)$ — бесконечно малые величины при $t \to a$, и $x(t) = o(y(t))$, то говорят $x(t)$ ($y(t)$) есть *бесконечно малая высшего* (*низшего*) *порядка* по сравнению с $y(t)$ ($x(t)$), или: $x(t)$ ($y(t)$) *убывает быстрее* (*медленнее*), чем $y(t)$ ($x(t)$).

Если $x(t)$, $y(t)$ — бесконечно большие величины при $t \to a$, и $x(t) = o(y(t))$, то говорят, что $x(t)$ ($y(t)$) *растет медленнее* (*быстрее*), чем $y(t)$ ($x(t)$).

Если $|x(t)| \leqslant C|y(t)|$ ($C > 0$—постоянная), то говорят, что $x(t)$ *убывает не быстрее* $y(t)$ или $x(t)$ *растет не быстрее* $y(t)$ и символически записывают:

$$x(t) = O(y(t)).$$

Например, $t = O\left(t \sin \frac{1}{t}\right)$ и $t = O(\operatorname{tg} 2t)$ при $t \to 0$, $e^t = O\left(e^{\frac{t}{2}}\right)$ и $e^t = O\left(e^{\sqrt{t^2+1}}\right)$ при $t \to \infty$.

В частности, если $\lim\limits_{t \to a} \frac{x(t)}{y(t)} = C \neq 0$ (C — постоянная), то

$$x(t) = O(y(t)) \quad \text{и} \quad y(t) = O(x(t)).$$

Теорема 6. *Какова бы ни была последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определенных в окрестности точки $x = a$, всегда существует функция $\varphi(x) \in M$, быстрее убывающая (возрастающая) при $x \to a$, чем любая из функций $f_n(x)$.*

16. Монотонные функции. Функция $f(x)$ называется *монотонно невозрастающей* (*неубывающей*) на множестве X (например, на $[a, b]$), если для любых значений x_1 и x_2 из X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется соотношение $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ ($f(x_1) \leqslant f(x_2)$). Функция $f(x)$ называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*) *в строгом смысле* (или *строго монотонной*), если $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) для любых x_1 и x_2 из X, для которых $x_1 < x_2$.

Функции монотонно невозрастающие, монотонно неубывающие и строго монотонные называются *монотонными*.

У монотонной функции $f(x)$ всегда существуют предел слева и предел справа в ее точке разрыва $x = x_0$; при этом, если $f(x)$ — невозрастающая функция, то

$$f(x_0 - 0) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0 + 0);$$

если же $f(x)$ — неубывающая функция, то

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$

Пусть $f(x) = y$ — монотонно возрастающая (убывающая) непрерывная функция, определенная на отрезке, или интервале, или полуинтервале $X \in E_1$, отображающая X в некоторый отрезок, или интервал, или полуинтервал $Y \subset E_1$; тогда существует обратная к $f(x)$ функция $x = \varphi(y)$, определенная на Y. Функция $\varphi(y)$ непрерывна на Y и монотонно возрастает или убывает вместе с $f(x)$. Например, функция $y = x^2$ на полуинтервале $(0, +\infty)$ имеет обратную функцию $x = \sqrt{y}$ на $(0, +\infty)$.

17. Выпуклые функции. Функция $f(x)$, определенная на множестве X (конечном или бесконечном интервале, полуинтервале, отрезке) называется *выпуклой*, если для произвольных чисел x_1 и x_2 из X выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)];$$

функция $f(x)$ называется *вогнутой*, если выполняется обратное неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\,[f(x_1)+f(x_2)].$$

Геометрически это означает, что если $f(x)$ выпукла, то любая дуга кривой $y=f(x)$ лежит не выше стягивающей ее хорды; если же $f(x)$ вогнута, то, наоборот, любая дуга кривой $y=f(x)$ лежит не ниже стягивающей ее хорды.

Например, функции $|x|$, x^2, e^x, $x+|x|$ — выпуклые, а функции $-|x|$, $\sqrt{x}$, $-e^{-x}$ — вогнутые; функция $y=x^\alpha$ $(x>0)$ выпукла при $\alpha \geqslant 1$ и $\alpha<0$ и вогнута при $0<\alpha<1$.

Для того чтобы функция $f(x)$ была выпуклой на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любых чисел x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих условию $a \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant b$, имело место неравенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна (даже только непрерывна справа) и $f(x)=\frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}$, то она выпукла.

Если функция $f(x)$ монотонна на $[a, b]$, то $\int\limits_a^x f(\xi)\,d\xi$ — выпуклая функция.

Необходимо иметь в виду, что график выпуклой функции обращен выпуклостью вниз, т. е. по принятой в геометрических приложениях терминологии является вогнутой кривой.

Выпуклые функции обладают следующими свойствами:

1°. В каждой точке своей области определения выпуклая (вогнутая) функция $f(x)$ непрерывна.

2°. Если функция $f(x)$ — выпуклая, то $-f(x)$ есть вогнутая функция на множестве X.

3°. Выпуклая (вогнутая) функция $f(x)$, не равная постоянной на отрезке $[a, b]$, не может достигать максимума (минимума) внутри отрезка $[a, b]$.

4°. Если функция $f(x)$ выпукла (вогнута) на $[a, b]$, а $l(x)$ — линейная функция, причем $l(a)=f(a)$ и $l(b)=f(b)$, то либо $f(x)<l(x)$ $(f(x)>l(x))$ во всех точках интервала (a, b), либо $f(x)\equiv l(x)$.

5°. Линейная комбинация выпуклых функций с положительными коэффициентами — функция выпуклая, в частности, сумма конечного числа выпуклых функций—выпуклая функция.

6°. Если $f(u)$ — неубывающая выпуклая функция, а $u=\varphi(x)$ — выпуклая функция, то $f[\varphi(x)]$ — выпуклая функция от x.

7°. Функция, обратная убывающей (возрастающей) выпуклой функции, — выпуклая (вогнутая) функция.

8°. Если $f(x)$ выпукла на $[a, b]$, то для любых положительных чисел $p_i>0$ $(i=1, 2, \quad n)$ таких, что $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$ и любых точек $x_1, x_2, \quad x_n$ на отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство

$$f(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n)\leqslant p_1f(x_1)+ \\ +p_2f(x_2)+\ldots+p_nf(x_n).$$

9°. Всякая выпуклая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(x_0)=0$, представима в виде

$$f(x)=\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt,$$

где $p(t)$ — неубывающая, непрерывная справа функция.

Функция $\varphi(x)$, определенная на множестве $X\subset E_1$, называется *логарифмико-выпуклой функцией*, если $\ln\varphi(x)$ есть выпуклая функция, т. е. выполняется соотношение

$$\varphi^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\varphi(x_1)\varphi(x_2)$$

для любых x_1 и x_2 из X. Логарифмико-выпуклая функция есть функция выпуклая. Например функция $\varphi(x)=x\ln x$ — логарифмико-выпуклая при $x>0$; $\varphi(x)=e^{x^2}$ — логарифмико-выпуклая для всех $x\in(-\infty, +\infty)$; $\varphi(x)=x^k$, k — целое, логарифмико-выпуклая при $x\in(-\infty, +\infty)$ и четных $k\neq 0$, при $x\in(0, +\infty)$ и любых $k\neq 0$; $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ — логарифмико-выпуклая для $x>0$ (о функции $\Gamma(x)$ см. гл. VI, § 4, п. 5).

ГЛАВА II

n-МЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИИ В НИХ

Введение

В главе I рассматривались функции одного переменного, как функции точки числовой прямой E_1. Аналогично функции $f(x, y)$ двух переменных можно рассматривать как функции точки плоскости E_2 с координатами x, y, а функции $f(x, y, z)$ трех переменных — как функции точки пространства E_3 с координатами x, y, z.

В связи с этим уже примерно со средины прошлого века были введены в математику координатные пространства n измерений, и функции n переменных стали рассматриваться как функции точки таких n-мерных пространств. Вместе с тем на n-мерные пространства был обобщен ряд понятий обычной двумерной и трехмерной геометрий.

Такое обобщение оказалось не только формальным. Выработанная у нас геометрическая интуиция переносится в известном смысле на многомерные объекты и геометризирование изложения вопросов анализа и алгебры n переменных вносит большую наглядность. Геометрическая интуиция дает иногда возможность угадывать факты в n-мерной геометрии, которые могут быть истолкованы как соответствующие факты анализа и алгебры.

В § 1 настоящей главы излагается теория n-мерных пространств, в частности, теория ортогональных систем векторов, которая является элементарным аналогом более сложной теории систем ортогональных функций, излагаемой в главе IV.

§ 2 посвящен предельному переходу, непрерывным функциям и их обобщенно-непрерывным операторам в n-мерном пространстве. Он непосредственно связан с главой I, в которой рассматривались те же вопросы для частного случая $n = 1$.

В § 3 дается изложение одного из разделов n-мерной геометрии — теории выпуклых n-мерных тел, которая кроме геометрического интереса приобрела значение в ряде вопросов прикладной математики. Следует отметить, что, если рассматривать выпуклые тела не в n-мерном пространстве, а ограничиться теорией трехмерных выпуклых тел, то существенного упрощения не получилось бы; между тем приложения на практике получила именно теория выпуклых тел в пространстве большого числа измерений.

§ 1. n-мерные пространства

1. n-мерное координатное пространство. *Элементом X из n-мерного пространства E_n* называется совокупность n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Его обозначение: $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *Пространство E_n* есть совокупность таких элементов.

Элементы пространства E_n трактуются двояко: с одной стороны, их рассматривают как *точки с координатами* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, с другой стороны — как *векторы с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (n-мерное векторное пространство)*. Вначале мы будем пользоваться первой трактовкой.

Расстояние или *метрику* в пространстве E_n вводят по-разному (см., например, ниже § 3, п. 3). Наиболее распространенной является следующая (так называемая *евклидова*) метрика: *расстоянием* $\rho(X, Y)$ *между точками $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из E_n* называют число

$$\rho(X, Y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}. \tag{2.1}$$

Пространство E_n с так введенным расстоянием называется *n-мерным евклидовым пространством.*

Формула (2.1) обобщает формулы расстояния между точками в аналитической геометрии для $n=1, 2, 3$.

Через θ обозначают точку с нулевыми координатами $\theta=(0, 0, \ldots, 0)$ (*начало координат*). Имеем

$$\rho(X, \theta)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} \tag{2.2}$$

Введенные таким образом расстояния обладают следующими свойствами:

1) $\rho(X, Y) \geqslant 0$, причем $\rho(X, Y) = 0$ лишь, если $X = Y$.

2) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.

3) $\rho(X, Z) \leqslant \rho(X, Y) + \rho(Y, Z)$

(*неравенство треугольника*).

При всяких обобщениях понятия расстояния обычно стараются сохранить эти свойства.

2. n-мерное векторное пространство. n-мерное пространство E_n можно рассматривать так же, как *пространство векторов*. Над векторами в плоскости E_2 и в трехмерном пространстве E_3 можно производить операции сложения и умножения на скаляр (число). Каждый элемент $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из E_n будем рассматривать как *вектор с координатами* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Суммой векторов $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называют вектор $X + Y$ из E_n с координатами $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n$. Аналогично определяется *разность* $X - Y$.

Если λ — число (скаляр), а $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор из E_n, то λX обозначает вектор из E_n с координатами λx_1, $\lambda x_2, \ldots, \lambda x_n$. Векторы X и λX называются *коллинеарными*. *Линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над их координатами.*

Нулевой точке θ отвечает нулевой вектор θ с компонентами, равными нулю. Очевидно, что $X + \theta = X$, $\lambda\theta = \theta$.

Векторы

$$e_1(1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2(0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n(0, 0, \ldots, 0, 1)$$

или иначе

$$e_i(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \qquad \delta_{ij}, \qquad \delta_{in}),$$

где δ_{ij} — символы Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{при} \quad i = j, \end{cases}$$

называются *ортами*. Для вектора $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ справедливо равенство

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Нормой $\|X\|$ вектора X называют число

$$\|X\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \tag{2.3}$$

равное расстоянию $\rho(X, \theta)$ точки X до θ.

Норма вектора удовлетворяет условиям:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \|X\| \geqslant 0, \text{ причем } \|X\| = 0 \text{ лишь в случае } X = \theta. \\ 2)\ \|\lambda X\| = |\lambda| \, \|X\|. \\ 3)\ \|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|. \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

Расстояние $\rho(X, Y)$ между элементами X и Y, введенное по (2.1), совпадает с нормой разности соответствующих векторов

$$\rho(X, Y) = \|X - Y\|. \tag{2.5}$$

Сферой $S(X_0, r)$ в E_n радиуса r с центром в X_0 называется множество точек (векторов) X, для которых

$$\rho(X, X_0) \equiv \|X - X_0\| < r.$$

Употребляя для множеств в E_n введенную в гл. I, § 2, п. 2 форму записи, имеем

$$S(X_0, r) = (\rho(X, X_0) < r).$$

3. Скалярное произведение. По аналогии с двух- и трехмерным случаем *скалярное* или *внутреннее произведение векторов* $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \quad y_n)$ из E_n определяется равенством

$$XY = (XY) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{2.6}$$

Простейшие свойства скалярных произведений:

1) $XY = YX$.

2) $XX = \|X\|^2 \geqslant 0$.

Неравенство Коши. *Для любых векторов $X(x_1, x_2, \quad x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \quad y_n)$ из E_n выполняется неравенство*:

$$|XY| \leqslant \|X\| \, \|Y\| \tag{2.7}$$

или

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}. \tag{2.7'}$$

Неравенства (2.7) *и* (2.7′) *переходят в равенства тогда и только тогда, когда векторы X и Y коллинеарны* (т. е. если $X = \theta$ или если $Y = \lambda X$, т. е. если все $x_i = 0$ или $y_i = \lambda x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$)).

Угол между векторами. Пусть $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — два вектора из E_n, отличные от θ; *угол* φ между ними определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{XY}{\|X\|\,\|Y\|}. \tag{2.8}$$

В силу (2.7) $|\cos\varphi| \leqslant 1$.

Величина проекции вектора X на вектор Y определяется числом

$$\frac{XY}{\|Y\|} = \|X\|\cos\varphi. \tag{2.9}$$

При $\|Y\| = 1$ величина проекции вектора X на Y равна их скалярному (внутреннему) произведению:

$$XY = \|X\|\cos\varphi. \tag{2.10}$$

Пример 1. Величина проекции вектора $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на орт e_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) равна координате x_i вектора X.

4. Линейная система и ее базисы. n-мерное векторное пространство является частным случаем n-мерной линейной системы.

Линейной системой L называется множество элементов, к которым можно применять операцию сложения, т. е. операцию нахождения по двум элементам a и b из L нового элемента c из L, $c = a + b$, и операцию умножения на действительное число λ, т. е. операцию нахождения по элементу a из L и числу λ элемента $d = \lambda a$ из L. Эти операции обладают следующими свойствами:

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$.
2) $a + b = b + a$.
3) $\lambda(\lambda_1 a) = (\lambda\lambda_1) a$.
4) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.
5) $(\lambda + \lambda_1) a = \lambda a + \lambda_1 a$.
6) $1 \cdot a = a$.

Система L обладает нулевым элементом θ, для которого $a + \theta = a$, $0 \cdot a = \theta$ при $a \in L$.

Линейно независимые элементы. Элементы x_1, x_2, x_k линейной системы называются *линейно зависимыми*, если существует система чисел c_1, c_2, c_k, не обращающихся одновременно в нуль, и таких, что

$$c_1x_1+c_2x_2+ \quad +c_kx_k=\theta; \tag{2.11}$$

если же такой системы чисел не существует, т. е. если равенство (2.11) выполняется лишь при

$$c_1=c_2=\ldots=c_k=0,$$

то элементы x_1, x_2, x_k называются *линейно независимыми*.

Пример 2. На плоскости векторы $X_1(1, 1)$ и $X_2(2, 3)$ линейно независимы, а векторы $X_1(1, 1)$ и $X_3(3, 3)$ линейно зависимы (так как $3X_1-X_3=\theta$). В трехмерном пространстве векторы $Y_1(1, 0, 0)$, $Y_2(1, 1, 0)$ и $Y_3(1, 1, 1)$ линейно независимы; векторы $Z_1(1, 0, 0)$, $Z_2(2, 1, 1)$ и $Z_3(3, 2, 2)$ линейно зависимы, так как

$$Z_1-2Z_2+Z_3=\theta.$$

Линейная система называется *n-мерной*, если у нее существует n линейно независимых векторов, но любые $n+1$ ее элементов линейно зависимы. Линейная система называется *бесконечномерной*, если она содержит любое число линейно независимых элементов. n-мерное векторное пространство есть n-мерная линейная система.

Множество решений линейного однородного дифференциального уравнения образует линейную систему. При этом в случае обыкновенного уравнения n-го порядка эта система n-мерная; в случае уравнения в частных производных эта система бесконечномерная.

Базисом n-мерной линейной системы L_n называется любое множество $(e_1, e_2, \quad e_n)$ из n линейно независимых элементов.

Любой элемент l системы L выражается линейно (и притом единственным образом) через элементы базиса:

$$l=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n; \tag{2.12}$$

элементы x_ie_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ называются *компонентами по базису* $(e_1, e_2, \quad e_n)$, а числа x_n — *координатами по этому базису*.

Пример 3. В n-мерном векторном пространстве базис образуют орты e_i:

$$e_1=(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),\quad e_2=(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ \ldots$$
$$\ldots,\ e_n=(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1).$$

Можно рассматривать n-мерную линейную систему как n-мерное пространство, в котором базисные элементы играют роль ортов.

Примеры n-мерных линейных систем. В анализе часто рассматриваются линейные системы функций, для которых сложение и умножение на число понимается в обычном смысле. Приведем несколько примеров таких систем.

1) $(n+1)$-мерная система многочленов

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

степени не выше n. В качестве базиса можно принять систему степеней

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,$$

а также любую систему многочленов

$$P_0=1,\quad P_1(x)=x+a_{10},$$
$$P_2(x)=x^2+a_{21}x+a_{20},\ \ldots,\ P_k(x)=x^k+\sum_{i=0}^{k-1} a_{ki}x^i,$$
$$\ldots,\ P_n(x)=x^n+\sum_{i=0}^{n-1} a_{ni}x^i.$$

2) Система однородных многочленов $P_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ степени k от n переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, т. е. сумм членов вида

$$a_{k_1k_2\ldots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n},$$

где

$$k_1+k_2+\ldots+k_n=k.$$

Базис такой системы состоит из всех одночленов вида $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ степени $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$. Число таких одночленов (т. е. число измерений системы) равно

$$\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}.$$

Например, при $n=3$, $k=3$ число их равно $\frac{5!}{3!\,2!}=10$ (это суть одночлены $x_1^3,\ x_1^2x_2,\ x_1^2x_3,\ x_1x_2^2,\ x_1x_2x_3,\ x_1x_3^2,\ x_2^3,\ x_2^2x_3,\ x_2x_3^2,\ x_3^3$).

Если в L_n существует один базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, то существует и бесконечное множество других базисов. Пусть $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ — другой базис, тогда элементы e_i старого базиса выражаются через элементы e'_j нового по формулам

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e'_j \qquad (i = 1, 2, \qquad n),$$

причем определитель $|\alpha_{ij}|_{i, j}^{1, n} \neq 0$. Элемент l выражается через элементы нового базиса по формуле

$$l = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i.$$

Связь между координатами x_i и x'_i элемента l по базисам (e_i) и (e'_i) выражается формулой

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j \qquad (i = 1, 2, \qquad n). \tag{2.13}$$

Из сказанного выше следует, что элементы любой n-мерной линейной системы L_n с базисом $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ можно рассматривать как векторы n-мерного пространства, у которого базисные элементы e_i играют роль ортов. Рассмотрением таких пространств мы и ограничимся в данной главе.

5. Линейные функции. *Линейной функцией* или *линейной формой* в E_n называется функция $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условиям:

1) $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$. (2.14)

2) $f(\lambda X) = \lambda f(X)$, где λ — любое число. (2.15)

Если для ортов e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ значения $f(e_i) = y_i$, то

$$f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i. \tag{2.16}$$

Числа y_i — *коэффициенты линейной формы* f.

Эти коэффициенты можно рассматривать как координаты вектора $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из E_n; тогда из (2.16) имеем

$$f(X) = YX. \tag{2.17}$$

Линейная функция $f(X)$ равна скалярному произведению фиксированного вектора Y на переменный вектор X. Принято говорить, что функция $f(X)$ *порождается вектором* Y.

Скалярное произведение XY есть *билинейная* функция от X и Y: она является линейной функцией от X, если фиксировано Y, и линейной функцией от Y, если фиксировано X.

Имеет место равенство

$$\|Y\| = \max_{\|X\| \leqslant 1} YX, \tag{2.18}$$

т. е. *норма вектора Y, порождающего линейную форму YX, равна максимуму ее значений на единичной сфере* $\|X\| \leqslant 1$.

Критерий линейной независимости. Определитель Грама для векторов. Пусть

$$X_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

— векторы пространства E_n. Образуем из них определитель

$$\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.19}$$

Теорема 1. *Для того чтобы векторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из E_n были линейно независимы, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_n) \neq 0.$$

Определителем Грама $\Gamma_{X_1, X_2, \ldots, X_m}$ векторов $X_1, X_2, \ldots, X_m$ из E_n называется определитель

$$\Gamma_{X_1 X_2 \ldots X_m} = \begin{vmatrix} (X_1 X_1) & (X_1 X_2) & \ldots & (X_1 X_m) \\ (X_2 X_1) & (X_2 X_2) & \ldots & (X_2 X_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (X_m X_1) & (X_m X_2) & \ldots & (X_m X_m) \end{vmatrix}. \tag{2.20}$$

Свойства определителя Грама:

1) $\Gamma_{X_1 X_2 \ldots X_m} \geqslant 0$.

2) Для линейной независимости векторов $X_1, X_2, \ldots, X_m$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\Gamma_{X_1 X_2 \ldots X_m} > 0. \tag{2.21}$$

3) При $m=n$

$$\Gamma_{X_1 X_2 \ldots X_n} = [\Delta(X_1, X_2, \quad X_n)]^2.$$

Определитель Грама для функций см. гл. IV, § 2, п. 3.

Многообразия. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — линейно независимые элементы из E_n $(1 \leqslant k < n)$.

Множество элементов X вида

$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i X_i \tag{2.22}$$

при произвольных действительных c_i называется *k-мерным линейным многообразием.*

Одномерное линейное многообразие, т. е. множество элементов вида $X = \lambda x_1$ $(x_1 \neq \theta)$ есть *прямая, проходящая через* θ *и* x_1. Часть этой прямой — множество элементов вида $X = \lambda x_1$, $\lambda > 0$, — называется *лучом.*

Сдвинутым k-мерным многообразием или *k-мерной плоскостью* называется совокупность элементов X вида

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} c_i X_i \tag{2.23}$$

при фиксированных и линейно независимых $X_1, X_2, \ldots, X_k$ и произвольных значениях чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Оно получилось *сдвигом на вектор* X_0 многообразия (2.22). Одномерное сдвинутое многообразие — это *прямая*

$$X = X_0 + tX_1 \qquad (-\infty < t < +\infty). \tag{2.24}$$

Для прямой, проходящей через точки X_1 и X_2, имеем:

$$X = (1-t)X_1 + tX_2 \qquad (-\infty < t < +\infty). \tag{2.25}$$

Отрезком прямой, соединяющим точки X_1 и X_2, называют множество элементов вида

$$X = (1-t)X_1 + tX_2 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{2.26}$$

$(n-1)$-мерное сдвинутое многообразие называется *гиперплоскостью.*

Каждая гиперплоскость определяется уравнением (т. е. есть множество точек $X(x_1, x_2, \quad x_n)$, удовлетворяющих уравнению)

$$YX = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j = d, \tag{2.27}$$

где YX — линейная форма, порождаемая ненулевым вектором $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Обратно, *каждое такое уравнение определяет гиперплоскость*.

Вообще, *каждое k-мерное сдвинутое линейно многообразие* $(1 \leqslant k < n)$ *определяется системой уравнений*

$$Y_iX = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_j = d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-k), \quad (2.28)$$

где векторы $Y_i(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k)$, порождающие соответственные линейные формы, *линейно независимы*; иначе говоря, каждое такое многообразие *определяется $n-k$ линейными уравнениями*. Обратно, *$n-k$ уравнений* (2.28) *(при линейной независимости векторов Y_i) определяют сдвинутое k-мерное многообразие*. Если все правые части $d_i = 0$, то получаем k-мерное (несдвинутое) многообразие. В частности, *прямая* (2.24) определяется $n-1$ уравнением (2.28).

6. Линейная оболочка. *Линейной оболочкой множества M из E_n* называется наименьшее линейное многообразие, содержащее M; иначе — линейная оболочка множества M есть множество всех линейных комбинаций любого конечного числа элементов M, т. е. элементов вида

$$\sum_{i=1}^{r} t_iX_i, \quad X_i \in M.$$

В частности, если $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — линейно независимые элементы из E_n, то их линейная оболочка есть k-мерное линейное многообразие, состоящее из всех элементов вида

$$\sum_{i=1}^{k} l_iX_i.$$

Заметим, что если векторы $X_1, X_2, \ldots, X_k$ образуют базис k-мерного линейного многообразия E_k из E_n, то можно их дополнить векторами $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-k}$ так, что *векторы $X_1, X_2, \ldots, X_k, Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-k}$ образуют базис в E_n*. Обозначим через E_{n-k} линейную оболочку векторов L_i. Каждый элемент Y из E_n можно представить, и притом однозначно, в виде

$$Y \doteq X + Z, \qquad (2.29)$$

где
$$X=\sum_{i=1}^{k} c_i X_i \in E_k, \quad Z=\sum_{j=1}^{n-k} d_j Z_j \in E_{n-k}.$$

Здесь пространство E_n есть *прямая сумма* многообразий E_k и E_{n-k}, последнее символически записывают так:
$$E_n = E_k \dot{+} E_{n-k}. \tag{2.30}$$

X и Z в (2.29) называются *компонентами* вектора Y в E_k и E_{n-k}.

7. Ортогональные системы векторов. *Два вектора X и Y* (ненулевых) называются *ортогональными*, если $XY=0$ (т. е. если $\cos\varphi=0$). *Векторы $X_1, X_2, \ldots, X_m$ образуют ортогональную систему, если они попарно ортогональны между собой*, т. е.
$$X_i X_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{2.31}$$

Векторы ортогональной системы линейно независимы. Если, сверх того, $\|X_i\|=1$, то векторы образуют *ортонормированную систему*. В этом случае
$$X_i X_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{при} \quad i = j. \end{cases} \tag{2.32}$$

Орты $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют ортонормированную систему.

В n-мерном пространстве E_n существует бесчисленное множество ортогональных, в частности ортонормированных, систем из n элементов, но нет ортогональных систем из $(n+1)$ элементов. Система из n ортогональных векторов в E_n образует базис в E_n — так называемый *ортогональный базис*.

Теорема 2. *Если векторы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ образуют ортонормированную систему в E_n, то любой вектор X из E_n может быть представлен (и притом единственным образом) в виде*
$$X=\sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i, \qquad x'_i = X e'_i, \tag{2.33}$$
$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x'^2_i. \tag{2.34}$$

Переход от ортов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в E_n к другому ортонормированному базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в E_n называется *ортогональным преобразованием*. При ортогональном преобразовании внутреннее произведение векторов не изменяется, т. е. если

$$X = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{i=1}^{n} y'_i e'_i,$$

то

$$XY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i.$$

В частности, нормы $\|X\| = \sqrt{XX}$ (см. (2.34)) всех элементов из E_n и расстояния между любыми парами $\rho(X, Y) = \|X - Y\|$ таких элементов не меняются при ортогональном преобразовании.

Вообще, если векторы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ образуют ортогональную систему, то

$$X = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i, \quad x'_i = \frac{Xe'_i}{\|e'_i\|^2}, \tag{2.33'}$$

$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x'^2_i \|e'_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (Xe'_i)^2. \tag{2.34'}$$

По аналогии с теорией ортогональных рядов (см. главу IV) можно называть коэффициенты x'_i в равенствах (2.33) и (2.33′) *коэффициентами Фурье*.

8. Биортогональные системы векторов. Две системы векторов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ из E_n образуют *биортогональную систему*, если

$$X_i Y_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad X_i Y_j \neq 0 \quad \text{при} \quad i = j. \tag{2.35}$$

Путем умножения векторов X_i или Y_i на константы можно, сохраняя за новыми векторами прежние обозначения, добиться, чтобы

$$X_i Y_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

В этом случае каждый вектор Z из E_n можно представить в виде

$$Z = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i, \qquad x_i = ZX_i, \tag{2.36}$$

и в виде

$$Z=\sum_{i=1}^{n} y_i X_i, \qquad y_i = ZY_i. \qquad (2.36')$$

Если в E_n задана система из n независимых векторов $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то можно построить для нее систему векторов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ так, чтобы обе системы $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ были биортогональные. Если

$$X_i=(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) \quad \text{и} \quad Y_i=(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in}),$$

то построение системы $\{Y_i\}$ по системе $\{X_i\}$ сводится к построению матрицы $\|y_{ij}\|_{i,j}^{1,n}$, обратной к матрице $\|x_{ij}\|_{i,j}^{1,n}$.

Об ортогональных и биортогональных системах функций см. гл. IV.

Пример 4. Пусть $X_i=\sum_{j=1}^{i} e_j$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, где e_j — орты в E_n; $Y_i=e_i-e_{i+1}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, $Y_n=e_n$. Тогда $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ — биортогональные системы в E_n.

9. Проекции вектора на многообразие. Пусть в n-мерном пространстве E_n задано k-мерное многообразие E_k $(1 \leqslant k < n)$. Говорят, что *вектор X из E_n ортогонален E_k* (запись $X \perp E_k$), если X ортогонален любому вектору Y из E_k, т. е.

$$XY=0, \quad \text{если} \quad Y \perp E_k.$$

Вектор X_0 из E_k называется *проекцией* вектора X на E_k, если $X-X_0$ ортогонален E_k,

$$X_0=\text{пр}_{E_k} X. \qquad (2.37)$$

Имеем:

$$X=X_0+(X-X_0), \quad (X-X_0) \perp E_k, \quad X_0 \in E_k.$$

Если $X \in E_k$, то $\text{пр}_{E_k} X = X$.

Для любого вектора X из E_n существует, и притом единственная, его проекция на E_k.

Если X_0 — проекция вектора X на E_k, то имеем:

1) $$\|X\|^2=\|X_0\|^2+\|X-X_0\|^2. \qquad (2.38)$$

2) Для любого вектора $Y \in E_k$ справедливо соотношение

$$\|X-Y\|^2 \geqslant \|X-X_0\|^2, \qquad (2.39)$$

причем знак равенства наступает лишь в случае, если $Y=X_0$. Другими словами, минимум $\|X-Y\|^2$, где Y — любой вектор из E_k, достигается при

$$Y=X_0=\text{пр}_{E_k}X.$$

Пусть $U_0\neq\theta$ — некоторый вектор из E_k. Обозначим через E_1 множество векторов вида tU_0 $(-\infty<t<+\infty)$, т. е. прямую $E_1=tU_0$. *Проекцией вектора X на вектор U_0* называется проекция X на прямую E_1, т. е. имеем:

$$\text{пр}_{U_0}X=\frac{(XU_0)\,U_0}{\|U_0\|^2} \tag{2.40}$$

и, в частности, если $\|U_0\|=1$, то

$$\text{пр}_{U_0}X=(XU_0)\,U_0=(\|X\|\cos\varphi)\,U_0,$$

где φ — угол между векторами X и U_0.

Разложение (2.33) *вектора X по системе ортогональных векторов e'_j* $(j=1, 2, \ldots, n)$ *означает представление X в виде суммы его проекций на e'_j.*

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — ортонормированные векторы в E_n $(k<n)$; они образуют ортогональный базис в E_k — их линейной оболочке. Дополним их векторами X_{k+j} $(j=1, 2, \ldots, n-k)$ так, что n векторов X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ образуют ортогональный базис в E_n.

Пусть X — произвольный вектор в E_n, тогда

$$\text{пр}_{E_k}X=\sum_{i=1}^{k}c_iX_i,\qquad c_i=XX_i.$$

Сумма первых k членов в разложении (2.33) *или* (2.33′) *есть проекция вектора X на линейную оболочку первых k из векторов X_i* $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Пусть векторы $\{X_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, k<n)$ ортогональны. Образуем всевозможные суммы $\sum\limits_{i=1}^{n}c_ie'_i$. Выражение $\left\|X-\sum\limits_{i=1}^{k}c_ie_i\right\|^2$ достигает минимума, когда $c_i=x'_i$, где c_i — «коэффициент Фурье»; $c_i=XX_i$ при $\|X_i\|=1$, а в общем случае $c_i=\dfrac{XX_i}{\|X_i\|}$.

Теорема 3. *Пусть* $\{L_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ *образуют базис (вообще говоря, не ортогональный в* E_k*), а* X — *произвольный вектор из* E_n*. Тогда*

$$\text{пр}_{E_k} X = \sum_{j=1}^{k} d_j L_j, \tag{2.41}$$

где d_j *определяются из системы линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{k} (L_i L_j)\, d_j = X L_i \quad (i=1, 2, \ldots, k), \tag{2.42}$$

определитель которой совпадает с определителем Грама Г. *При* $k=n$ *система* (2.42) *переходит в систему для определения компонентов вектора* X *по базису* $\{L_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

§ 2. Предельный переход, непрерывные функции и операторы

1. Предельный переход в *n*-мерном пространстве. Рассмотрим линейную систему L_n с выбранным базисом. Каждый элемент $X \in L_n$ определяется своими координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Возьмем последовательность $\{X_n\} = \{X_1, X_2, \ldots\}$ элементов L_n, где $X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$. Элемент $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из L_n называется *пределом для последовательности* $\{X_m\}$, если

$$x_i = \lim_{m \to \infty} x_{mi} \tag{2.43}$$

(т. е. если все координаты X являются пределами соответствующих координат членов последовательности $\{X_m\}$). В этом случае принято писать

$$X = \lim_{m \to \infty} X_m, \tag{2.44}$$

говорят также, что *последовательность* $\{X_m\}$ *сходится к* X.

Координаты элементов $\{X_m\}$ и X зависят от выбора базиса в L_n, но равенство (2.43), а значит и (2.44), не зависит от выбора базиса в L_n: если при одном базисе координаты X_m при $m \to \infty$ стремятся к соответствующим координатам X, то это свойство имеет место при любом выборе базиса.

n-мерная линейная система, в которой определен предельный переход в указанном смысле, называется *n-мерным линейным пространством.*

В евклидовых и, более общо, в нормированных (см. § 3, п. 3) пространствах, в которых определено расстояние между точками, или норма вектора, можно определить предельный переход (2.44) следующим образом: $X = \lim\limits_{m\to\infty} X_m$, если

$$\lim_{m\to\infty} \rho(X_m, X) = \lim_{m\to\infty} \|X_m - X\| = 0. \tag{2.45}$$

Условие (2.45) *эквивалентно условию* (2.43). Поэтому, если определить в линейном пространстве расстояние между точками или норму вектора (§ 1, п. 1 или 7) и пользоваться определением предела по формуле (2.45), то никаких изменений в смысле предельного перехода в L_n не происходит[1]).

Не нарушая общности, мы будем в этой главе рассматривать предельный переход в евклидовых пространствах E_n.

Так же как в одномерном случае (см. гл. I, § 3, п. 2), будем называть последовательность $\{X_m\}$ из E_n *фундаментальной*, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что

$$\|X_{m'} - X_m\| < \varepsilon,$$

коль скоро $m' > N$, $m > N$.

Для того чтобы последовательность $\{X_m\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она являлась фундаментальной последовательностью.

Понятие *предельной точки* (*точки сгущения*) для множества $M \subset E_n$ есть непосредственное обобщение этого понятия для E_1: точка X называется *предельной для множества* $M \subset E_n$, если она является пределом для некоторой последовательности $\{X_m\}$ точек из M, отличных от X.

Другое эквивалентное этому определение: точка X называется *предельной для множества* M, если в любой сфере $S(X, \varepsilon)$ с центром в X содержится отличная от X точка множества M.

Имеет место аналог теоремы Больцано — Вейерштрасса (см. гл. I, § 3, п. 1).

Всякое ограниченное бесконечное множество в E_n имеет, по крайней мере одну, предельную точку.

---

1) Такое введение расстояния называется *метризацией* L_n.

Открытым множеством в E_n называется такое множество U точек из E_n, что если точка X принадлежит U, то существует некоторая сфера с центром в X, принадлежащая U. Открытое множество называется *областью*, если любые две его точки можно соединить ломаной, целиком принадлежащей этому множеству.

Примером области на прямой может служить конечный или бесконечный интервал; на плоскости — внутренность круга, треугольника, полосы между двумя параллельными прямыми и т. д.; в трехмерном пространстве — внутренность шара, параллелепипеда, конуса и т. д.

Примером области в E_n может служить параллелепипед (в E_1 параллелепипед есть интервал), т. е. множество точек $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_i < x_i < b_i$ $(i = 1, 2, \qquad n)$, где a_i и b_i — заданные числа.

Пересечение любого конечного числа областей есть область.

Граничной точкой области Q в E_n называется точка, предельная для Q, но не принадлежащая Q. Множество граничных точек области Q называется *границей* Q. Область Q вместе с границей образует *замкнутую область* (или *тело*) в E_n.

Например, для интервала (a, b) граница состоит из точек a и b, а замкнутой областью будет отрезок $[a, b]$; для сферы $S(X_0, r)$ границей будет поверхность сферы, т. е. множество точек X, для которых

$$\rho(X, X_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2} = r.$$

Замкнутым множеством в E_n называется множество в E_n, содержащее все свои предельные точки; например, замкнутые области являются замкнутыми множествами.

Теорема 4. *Дополнение в* E_n *к открытому множеству (области) есть множество замкнутое, дополнение к замкнутому — открытое.*

Например, дополнение к сфере $(\|X\| < r)$ есть замкнутое множество $(\|X\| \geqslant r)$, дополнение к замкнутой сфере $(\|X\| \leqslant r)$ есть область $(\|X\| > r)$.

2. Ряды векторов. Законы предельного перехода для векторов (точек) n-мерного пространства E_n в основном совпадают с законами предельного перехода для E_1. Нетривиальным является обобщение на n-мерный случай теории условно сходящихся рядов (т. е. рядов, которые сами сходятся, тогда как ряды, составленные из их абсолютных величин, расходятся).

Ряд векторов из E_n

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k = X_1 + X_2 + X_3 + \tag{2.46}$$

определяется аналогично числовым рядам.

Если $X_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$, то ряду (2.46) отвечает k числовых рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{ki} = x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.47}$$

членами которых являются координаты векторов X_k — членов ряда (2.46).

Частичной суммой S_m ряда (2.46) называется сумма первых его m членов

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} X_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_m.$$

Ряд (2.46) называется *сходящимся*, если его частичные суммы S_m сходятся при $m \to \infty$ к некоторому вектору S — сумме ряда (2.46):

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} X_k = \lim_{m \to \infty} S_m.$$

Сходимость ряда (2.46) эквивалентна сходимости всех числовых рядов (2.47). Если $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, то

$$s_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_{ki} \qquad (i = 1; 2, 3, \ldots, n).$$

Ряд (2.46) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд норм его членов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|X_k\|.$$

Абсолютная сходимость ряда (2.46) эквивалентна абсолютной сходимости числовых рядов (2.47).

Ряд (2.46) называется *условно сходящимся*, если он сходится неабсолютно. Имеет место теорема Штейница, обобщающая теорему Римана (см. гл. III, § 1, п. 2).

1) *Если ряд* (2.46) *сходится абсолютно, то его сумма не меняется при изменении порядка его членов.*

2) *Если ряд* (2.46) *сходится условно, то при соответственной перестановке его членов можно изменить его сумму или сделать ряд расходящимся.*

3) *Суммы рядов, получаемых перестановкой членов сходящегося ряда* (2.46), *заполняют целиком некоторую k-мерную плоскость*, $0 \leqslant k \leqslant n$ (см. § 1, п. 5).

Для абсолютно сходящегося ряда $k=0$, для условно сходящегося $k>0$.

Пример 5. Пусть $x_k=(-1)^k \frac{1}{k}$, s — целое число, $1 \leqslant s \leqslant n$. Каждое натуральное число m можно представить в виде $m=rs+k$, где r — целое число, $1 \leqslant k \leqslant s$. Пусть

$$X_m = X_{rs+k} = x_r e_k, \quad \text{где} \quad e_k \quad (k=1, 2, \ldots, s) \text{ — орты.}$$

Тогда, меняя порядок в ряде $\sum\limits_m X_m$, можно получить в качестве суммы любой вектор s-мерного многообразия E_s — линейной оболочки ортов $e_1, e_2, \ldots, e_s$ (см. § 1, п. 6).

3. Непрерывные функции n переменных. Функции точки (вектора) n-мерного пространства. Функции n переменных естественно трактовать как функции точки (или вектора) n-мерного пространства. Пусть каждой точке $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ множества M n-мерного пространства E_n отвечает число $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тогда говорят, что на множестве M в E_n *определена функция* $f(X)=$ $=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *точки* (*вектора*) X или функция n переменных — координат этой точки (вектора).

Так же как для функции одного переменного, вводится понятие предельного перехода для функции в E_n.

Пусть функция $f(X)$ определена на множестве $M \subset E_n$ и A — точка, предельная для M. Говорят, что $f(X)$ *стремится* к числу a, когда $X \in M$ стремится к A, если для любой последовательности $\{X_n\}$ из M, сходящейся к A,

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n)=a. \tag{2.48}$$

Соответствующая запись:

$$a = \lim_{X \to A\,(X \in M)} f(X). \tag{2.49}$$

(Если M есть область и A — внутренняя точка области, то необходимо указание на то, что X_n стремится к A, оставаясь в M.)

Другое определение равенства (2.49), эквивалентное предыдущему: равенство (2.49) означает, что каждому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\eta > 0$ такое, что при

$$0 < \|X - A\| < \eta \quad \text{и} \quad X \in M$$

выполняется неравенство

$$|f(X) - a| < \varepsilon. \tag{2.50}$$

Непрерывная функция. Рассмотрим функцию $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенную на множестве M из E_n, и точку $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ этого множества. Говорят, что функция $f(X)$ *непрерывна в точке* $\overline{X} \in M$, если имеет место соотношение

$$\lim_{m \to \infty,\ X_m \in M} f(X_m) = f(\overline{X}). \tag{2.51}$$

Это определение эквивалентно следующему: функция $f(X)$ *непрерывна в точке* $\overline{X}$ множества M, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\eta = \eta(\varepsilon)$, что для всех точек X из M, лежащих в сфере

$$\rho(X, \overline{X}) = \|X - \overline{X}\| < \eta, \tag{2.52}$$

выполняется неравенство

$$|f(X) - f(\overline{X})| < \varepsilon. \tag{2.52'}$$

Функция, непрерывная в каждой точке множества M, называется *непрерывной на* M.

Пример 6. Функция

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \|X\|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

определена и непрерывна в каждой точке сферы $\|X\|^2 < 1$.

Линейную функцию $f(X)$ (см. § 1, п. 5) можно определить как непрерывную в E_n функцию, удовлетворяющую условию аддитивности:

$$f(X_1+X_2)=f(X_1)+f(X_2).$$

Равномерная непрерывность. Функция $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на множестве M из E_n, *равномерно непрерывна* на нем, если для каждого числа $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\eta>0$, что для любой пары точек X_1 и X_2 из M, для которых

$$\rho(X_1, X_2)=\|X_1-X_2\|<\eta, \tag{2.53}$$

выполняется неравенство

$$|f(X_1)-f(X_2)|<\varepsilon. \tag{2.53'}$$

Число η в (2.52) зависит от ε и от выбора точки X, в неравенстве же (2.53), определяющем равномерную непрерывность функции, оно зависит только от ε, но не зависит от выбора точек X_1 и X_2.

Каждая равномерно непрерывная на M функция непрерывна на M. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно $\left(\text{например, функция } \frac{1}{\sqrt{1-\|X\|^2}}, \text{ непрерывная внутри сферы } \|X\|<1, \text{ неравномерно непрерывна в ней}\right)$.

Аналогично одномерному случаю (см. гл. I, § 3, п. 11) имеет место

Теорема 5. *Функция $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве U, равномерно непрерывна в нем.*

Максимум и минимум. Функция $f(X)$, определенная на множестве M, называется *ограниченной* на нем ***сверху*** (***снизу***), если существует такая константа C, что для любой точки X из M выполняется неравенство

$$f(X)\leqslant C \quad (\text{соответственно } f(X)\geqslant C). \tag{2.54}$$

Функция называется *ограниченной на M*, если она на M ограничена сверху и снизу.

Если $f(X)$ ограничена сверху (снизу) на M, то существует число $C(c)$ — *точная верхняя* (*нижняя*) *граница* чисел

$f(X)$ — значений функций $f(X)$ в точках M:

$$C = \sup_{X \in M} f(X) \qquad \left(c = \inf_{X \in M} f(X)\right). \tag{2.55}$$

Если в M существует точка X_0, в которой

$$f(X_0) = C = \sup_{X \in M} f(X),$$

то верхняя граница C называется *максимумом* функции $f(X)$ на M:

$$C = f(X_0) = \max_{X \in M} f(X). \tag{2.56}$$

X_0 называется *точкой максимума* функции $f(X)$ на M. Аналогично, если в M существует точка X_1, в которой

$$f(X_1) = c,$$

где

$$c = \inf_{X \in M} f(X),$$

то нижняя граница c называется *минимумом* функции $f(X)$ на M, а X_1 — *точкой минимума* $f(X)$ на M:

$$c = f(X_1) = \min_{X \in M} f(X). \tag{2.57}$$

В этом случае говорят, что функция $f(X)$ на M достигает своего максимума (минимума) в точке X_0 (соответственно X_1).

Теорема 6. *Непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве достигает в ней максимума и минимума.*

Скачок функции. В задачах математической физики часто встречается следующее обобщение понятия скачка на случай функции многих переменных. Пусть Q_i — область в E_n. Назовем ее «внутренней» к границе Γ областью, а область $Q_e = E_n - (Q_i + \Gamma)$ — «внешней» к границе Γ областью. Через A_i и A_e будем обозначать точки соответственно из Q_i и Q_e[1]). В $Q_i + Q_e$ задана функция f (которая может и не быть определенной на Γ). Предположим, что существует предел $f(A_e)$ $[f(A_i)]$, когда $A_e(A_i)$ стремится к точке A гра-

[1]) i и e — первые буквы слов «interior» и «exterior» (внутренний и внешний).

ницы Г, и обозначим:

$$f_e(A) = \lim f(A_e).$$

Если $f_i(A) \neq f_e(A)$, то говорят, что, *переходя через границу* Г *в точке* A *из* Q_i *в* Q_e, *функция претерпевает скачок*

$$f_e(A) - f_i(A).$$

Пример 7. Рассмотрим в E_2 ограниченную замкнутую выпуклую область Q_i с границей — гладкой линией Г — и область $Q_e = E_2 - Q_i - \Gamma$. Для произвольной точки $A \in E_2$ определим число $\alpha(A) > 0$, измеряющее угол, под которым видна из A линия Г. (Он образуется лучами, соединяющими A со всеми точками Г.)

Для точки $A_i \in Q_i$ имеем $\alpha(A_i) = 2\pi$; для точки $A_e \in Q_e$ имеем $0 < \alpha(A_e) < \pi$, причем если A_e стремится к точке $A \in \Gamma$, то $\alpha(A_e) \to \pi$. Для точки A границы Г имеем $\alpha(A) = \pi$.

Для функции $f(A) = \alpha(A)$ в точке $A \in \Gamma$ имеем $f_e(A) = f(A) = \pi < f_i(A) = 2\pi$; скачок $f_e(A) - f_i(A) = -\pi$.

Функции, зависящие от параметра. Каждую функцию $\varphi(x_1, x_2, \quad x_m; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ можно рассматривать как семейство

$$\{f_{t_1 t_2 \ldots t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m; t_1, t_2, \ldots, t_n)\}$$

функций от m переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, каждая из которых определяется набором n значений другой группы переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — так называемых «параметров». Ограничимся случаем системы $\{f_t(x) = \varphi(x, t)\}$ функций одного переменного x, зависящих от одного параметра t; t принимает любое значение из множества T числовой прямой E_1, а каждая функция $f_t(x)$ определена для x-ов из множества $X \in E_1$ (общий случай n параметров и m переменных исследуется аналогично). Пусть t_0 есть предельная точка для T. Если при любом t и $x \in X$ функция $f_t(x)$ при $t \to t_0$ $(t \in T)$ стремится к $f(x)$, то говорят, что функции $\{f_t(x)\}$ *сходятся на множестве* X к функции $f(x)$. При этом для любого $x \in X$ и любого заданного числа $\eta > 0$ можно указать число ε, зависящее от η и x, $\varepsilon = \varepsilon(\eta, x)$, такое, что

$$|f_t(x) - f(x)| < \eta \tag{2.58}$$

при $0 < |t - t_0| < \varepsilon$ $(t \in T)$.

Например, пусть T совпадает с интервалом $(0, \infty)$, $X = [0, 1]$; семейство функций $\{f_t(x)\}$ при $t \to 0$ сходится к $f(x)$ на $[0, 1]$, если

$$\text{а) } f_t(x) = \frac{\sin tx}{t}, \quad f(x) = x.$$

$$\text{б) } f_t(x) = (1 + tx)^{\frac{1}{t}}, \quad f(x) = e^x.$$

$$\text{в) } f_t(x) = x^{\frac{1}{t}}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Сходимость $\{f_t(x)\}$ к $f(x)$ на X называется *равномерной* при $t \to t_0$ $(t \in T)$, если для любого заданного $\eta > 0$ найдется зависящее от него число ε: $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$ такое, что неравенства (2.58) выполняются одновременно для всех x из X при $|t - t_0| < \varepsilon$ (ε уже не зависит здесь от выбора x). В примерах а), б) имеем случай равномерной сходимости, в примере в) — неравномерной.

Приведем следующие свойства равномерной сходимости семейства функций $\{f_t(x)\}$:

1°. Если при $t \to t_0$ $(t \in T)$ семейство $\{f_t(x)\}$ равномерно сходится на X к $f(x)$ и $\{t_n\}$ — любая последовательность из T, сходящаяся к t_0, то *последовательность* функций $\{f_{t_n}(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$.

2°. Если все функции $\{f_t(x)\}$ непрерывны на X, то их равномерный предел — функция $f(x)$, непрерывна на X. (См. примеры а), б). В примере в) предельная функция разрывна, что указывает на неравномерную сходимость $\{f_t(x)\}$ к $f(x)$.)

3°. Пусть функция двух переменных $\varphi(x, t)$ непрерывна в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant a_1$, $b \leqslant t \leqslant b_1$. Обозначая $f_t(x) = \varphi(x, t)$ при $t \in [b, b_1)$, $f(x) = \varphi(x, b_1)$, получаем, что функции $f_t(x)$ равномерно сходятся к $f(x)$ при $t \to b_1$.

4. Периодические функции n переменных. Многообразие постоянства. Пусть E_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — линейное многообразие в E_n, а $f(X)$ — функция, определенная в E_n. Многообразие E_k есть *многообразие постоянства для функции* $f(X)$, если для любого $X \in E_n$ и любого Y из E_k

$$f(X + Y) = f(X). \tag{2.59}$$

Например, для функции $f(x+y)$ двух переменных x и y прямая $x=-y$ есть многообразие постоянства. В самом деле, добавляя к вектору (x, y) любой вектор $(x_0, -x_0)$ этой прямой, мы не изменим этой функции.

Введем базис в E_n из элементов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$; $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-k}$, где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ образуют базис в многообразии постоянства E_k. Каждый элемент $X \in E_n$ представим в виде (см. (2.29))

$$X = Y + Z,$$

$$Y \in E_k, \quad Z = \sum_{i=1}^{n-k} z_i Z_i,$$

при этом

$$f(X) = f(Y+Z) = f(Z).$$

Функция $f(X) = f(Z)$ сводится к функции $n-k$ переменных — координат $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-k}$ вектора Z.

Периоды функций n переменных. *Периодом* функции $f(X)$, определенной на E_n, называется вектор ω (отличный от нулевого θ) такой, что при любом X

$$f(X+\omega) = f(X). \tag{2.60}$$

Из (2.60) следует, что *все элементы $Y \neq \theta$ многообразия постоянства функции f суть ее периоды*. Функция $f(X)$, обладающая периодом, не принадлежащим многообразию постоянства, называется *периодической*.

Ограничимся рассмотрением периодических функций, не имеющих многообразий постоянства. Заметим, что *всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов* (вместе с ω периодом является и всякий вектор вида $k\omega$, где k — любое целое число).

Теорема 7. *Если ω и ω_1 — периоды функции $f(X)$, то их сумма $\omega+\omega_1$ есть тоже период этой функции.*

Если $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ — периоды функции $f(X)$, то периодом ее является и любой вектор ω вида

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i,$$

где n_i — произвольные целые числа.

Периоды $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ образуют *систему основных периодов* функции $f(X)$, если все ее периоды представимы в виде линейных комбинаций с целочисленными коэффициентами от этих периодов и не представимы в виде таких линейных комбинаций меньшего числа периодов.

Пример 8. На плоскости E_2 рассмотрим функцию $f(X)=f(x_1, x_2)=\sin x_1 \cos x_2$. У нее есть система из двух основных периодов, а именно, векторов $\omega_1(2\pi, 0)$ и $\omega_2(0, 2\pi)$. Можно было бы в качестве основных периодов взять ω_1 и $\omega_3=(2\pi, 2\pi)$ (тогда $\omega_2=\omega_3-\omega_1$).

Теорема 8. *Непрерывная периодическая функция n переменных, не имеющая многообразия постоянства, имеет основную систему периодов, состоящую не более чем из n периодов.*

Пример 9. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — система линейно независимых векторов в E_n. Образуем множество A всевозможных векторов (точек) вида

$$\sum_{i=1}^{n} n_i \omega_i,$$

где числа n_i — целые. (Такое множество называется *целочисленной сеткой* в E_n.) Обозначим через $\rho(X, A)$ расстояние от точки $X \in E_n$ до ближайшей точки A; $\rho(X, A)$ есть функция X. Она имеет в качестве системы основных периодов векторы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Пример 10. Непрерывная функция комплексного переменного $f(x+iy)=P(x, y)+iQ(x, y)$ (не равная константе) может иметь не более двух независимых периодов (*теорема Якоби*).

5. Предельный переход для линейных оболочек. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — линейно независимые элементы в E. Будем обозначать через $L(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ — их линейную оболочку. Если $b_1, b_2, \ldots, b_p$ — другой базис в p-мерном многообразии $L(a_1, \ldots, a_p)$, то $L_p(b_1, b_2, \ldots, b_p)=L_p(a_1, a_2, \ldots, a_p)$.

Рассмотрим семейство векторов l_α, непрерывно зависящих от параметра α, такое, чтобы при $\alpha_2 \neq \alpha_1$, $\alpha_2 \to \alpha$ и $\alpha_1 \to \alpha$ выражение $\frac{l_{\alpha_2}-l_{\alpha_1}}{\alpha_2-\alpha_1}$ стремилось к вектору, который обозначим через $\frac{dl_\alpha}{d\alpha}$. При $\alpha_2 \neq \alpha_1$ будем считать l_{α_1} и l_{α_2} линейно независимыми. Выбрав в $L_2(l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2})$ другой базис

$$l_{\alpha_1}, \ \frac{l_{\alpha_2}-l_{\alpha_1}}{\alpha_2-\alpha_1},$$

будем иметь

$$L_2(l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}) = L_2\left(l_{\alpha_1}, \frac{l_{\alpha_2} - l_{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}\right).$$

Полагая векторы l_α и $\frac{d}{d\alpha} l_\alpha$ линейно независимыми, получим, что при $\alpha_1 \to \alpha$, $\alpha_2 \to \alpha$ плоскость $L_2(l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}) = L_2\left(l_{\alpha_1}, \frac{l_{\alpha_2} - l_{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)$ стремится к плоскости $L_2\left(l_\alpha, \frac{d}{d\alpha} l_\alpha\right)$.

При аналогичных условиях (полагая, что системы векторов $l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \ldots, l_{\alpha_p}$ при попарно неравных числах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ и векторов $l_\alpha, \frac{d}{d\alpha} l_\alpha, \ldots, \frac{d^p}{d\alpha^p} l_\alpha$ линейно независимы) получим при $\alpha_i \to \alpha$ $(i = 1, 2, \quad p)$:

$$L_p(l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \ldots, l_{\alpha_p}) \to L_p\left(l_\alpha, \frac{d}{d\alpha} l_\alpha, \ldots, \frac{d^{p-1}}{d\alpha^{p-1}} l_\alpha\right).$$

Для семейства функций $f_\alpha(x)$, зависящих от параметра α, при тех же условиях и при $\alpha_i \to \alpha$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ получим, что $L_p(f_{\alpha_1}(x), f_{\alpha_2}(x), \ldots, f_{\alpha_p}(x))$ стремится к $L_p\left(f_\alpha(x), \frac{\partial}{\partial\alpha} f_\alpha(x), \quad \frac{\partial^{p-1}}{\partial\alpha^{p-1}} f_\alpha(x)\right)$. Например, при $\alpha_i \to \alpha$ $(i = 1, 2, \ldots)$ получим:

$$L_p(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_p x}) \to L_p(e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{p-1}e^{\alpha x}),$$

$$L_p\left(\frac{1}{x-\alpha_1}, \frac{1}{x-\alpha_2}, \quad \frac{1}{x-\alpha_p}\right) \to$$
$$\to L_p\left(\frac{1}{x-\alpha}, \frac{1}{(x-\alpha)^2}, \ldots, \frac{1}{(x-\alpha)^p}\right),$$

$$L_p(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \quad x^{\alpha_p}) \to L_p(x^\alpha, x^\alpha \ln x, \quad x^\alpha \ln^{n-1} x),$$
$$L_2(|x-\alpha_1|, |x-\alpha_2|) \to L_2(|x-\alpha|, \operatorname{sign}|x-\alpha|).$$

Пусть A_α есть n-мерная матрица, $\lambda_{i\alpha}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — ее собственные значения (простые при $\alpha \neq 0$), $x_{i\alpha}$ — соответственные собственные векторы: $A_\alpha x_{i\alpha} = \lambda_{i\alpha} x_{i\alpha}$, $\|x_{i\alpha}\| = 1$. Предположим, что k чисел $\lambda_{i\alpha}$ $(i = 1, 2, \ldots, k \leqslant n)$ при $\alpha \to 0$ стремятся к собственному значению λ_0 матрицы A_0, а собственные векторы $x_{i\alpha}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — к собственному вектору x_1

матрицы A_0, отвечающему собственному значению λ_0. Тогда линейные оболочки $L_k(x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, \ldots, x_{k\alpha})$ стремятся к линейной оболочке $L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, где x_i при $i > 1$ — присоединенные собственные векторы матрицы A_0: $A_0x_i - \lambda_0x_i = x_{i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots, k)$.

6. Операторы из E_n в E_m. Пусть Q — множество в E_n (которое может совпадать с самим E_n); каждому элементу $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из Q отнесем элемент $Y(y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(X)$ из E_m. Тогда говорят, что *задан оператор* f из E_n в E_m, причем Q называют *областью определения оператора*. Говорят также, что дано *отображение* f множества Q из E_n в E_m или что оператор f осуществляет отображение множества Q из пространства E_n в пространство E_m.

Если

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m), \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$Y = f(X), \tag{2.61}$$

то

$$y_i = f_i(X) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.62}$$

где f_i — функция n переменных, определенная в Q, причем формула (2.62) есть координатная форма записи оператора f, а формула (2.61) — векторная. Функции f_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ называют *компонентами* оператора f и записывают

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Каждые m функций $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ от n переменных определяют оператор f из E_n в E_m, где $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Обычная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть оператор из E_n в E_1 (в числовую прямую).

Оператор $f(X)$ называется *непрерывным* в Q, если из

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} X$$

(X_n и X входят в Q) следует, что

$$f(X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(X).$$

Для того, чтобы оператор $f(X) = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X))$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы все функции $f_i(X) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ были непрерывны в Q.

Например, функции

$$Z_1 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = \sqrt{1 - \|X\|^2},$$

$$Z_2 = x_1 + x_2 + x_3$$

задают оператор из $E_3(x_1, x_2, x_3)$ в плоскость $E_2(Z_1, Z_2)$, определенный в трехмерном шаре $\|X\|^2 < 1$ и непрерывный в нем. Функции комплексного переменного дают нам пример операторов из E_2 в E_2 (отображений плоскости в плоскость).

Иногда вместо термина оператор из E_n в E_m употребляется термин «*вектор-функция*». Обычную функцию n переменных ($m = 1$, $n > 1$) называют *скалярной функцией векторного переменного*; оператор из E_1 в E_n, где $n > 1$, называется *вектор-функцией скалярного переменного* или просто *вектор-функцией*, оператор из E_n в E_m, где $n > 1$, $m > 1$, называют *вектор-функцией векторного переменного.*

Пусть дана вектор-функция $X = X(t)$, где t пробегает числовую прямую (или ее отрезок), X — точка E_m. Множество точек E_m вида $X(t)$ называется *кривой* или *линией* в E_m.

Линейные операторы. *Линейным оператором* (*отображением*) из $E_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $E_m(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ называется оператор $Y(X)$, удовлетворяющий условиям:

1) $Y(X_1 + X_2) = Y(X_1) + Y(X_2)$.

2) Оператор $Y(X)$ непрерывный.

Из условий 1) и 2) вытекает однородность линейного оператора:

$$Y(\lambda X) = \lambda Y(X).$$

Теорема 9. *Линейный оператор* $Y(X)$, *где* $Y = (y_1, y_2, \; y_m)$, $X = (x_1, x_2, \; x_n)$, *имеет вид*:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \quad + a_{in}x_n \qquad (i = 1, \quad n), \tag{2.63}$$

т. е. каждая координата $y_i(X)$ *оператора* $Y(X)$ *есть линейная функция от* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Каждый линейный оператор $Y(X)$ из E_n в E_m определяется прямоугольной матрицей

$$\left.\begin{gathered} A = \|a_{ij}\| \qquad (i = 1, 2, \quad m; \quad j = 1, 2, \ldots, n), \\ Y = AX. \end{gathered}\right\} \tag{2.64}$$

Обратно, каждая такая матрица определяет линейный оператор из E_n в E_m (по формуле (2.63)). *При* $m=n$ *линейный оператор из* E_n *в* E_n *определяется квадратной матрицей* $A=\|a_{ij}\|_{i,\,j}^{1,\,n}$.

Формула (2.63) представляет *координатную форму* записи линейного оператора (преобразования) из E_n в E_m.

7. Итерационные последовательности. Рассмотрим в E_k последовательность векторов

$$\{X_n\}=\{X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\},\quad X_n=(x_{n1},\ x_{n2},\ \ldots,\ x_{nk}),\quad (2.65)$$

или отвечающие ей k числовых последовательностей

$$\{x_{ni}\}=\{x_{0i},\ x_{1i},\ x_{2i},\ \ldots\}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k).\quad (2.66)$$

Последовательность векторов (2.65) (или система числовых последовательностей (2.66)) называется *итерационной*, если

$$X_n=f(X_{n-1})\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\qquad (2.67)$$

где f — оператор из E_k в E_k. Если $f=(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k)$, то равенство (2.67) в координатной форме записывается в виде

$$x_{ni}=f_i(x_{n-1,\,1},\ x_{n-1,\,2},\ \ldots,\ x_{n-1,\,k})\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k).\quad (2.68)$$

Задав $X_0=(x_{01},\ x_{02},\ \quad x_{0k})$, последовательно находим по (2.67) или (2.68)

$$X_1=(x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{1k}),\quad X_2=(x_{21},\ x_{22},\ \quad x_{2k}),\ \ldots$$

Иногда зависимость (2.68) записывается в виде

$$x_{ni}=f_i(x_{n1},\ x_{n2},\ \ldots,\ x_{n,\,i-1},\ x_{n-1,\,i},\ x_{n-1,\,i+1},\ \ldots,\ x_{n-1,\,k}).\quad (2.69)$$

(При нахождении i-й компоненты n-го вектора X_n используются уже найденные его компоненты $x_{n1},\ x_{n2},\ \ldots,\ x_{n,\,i-1}$.)

Пример 11. К. Ф. Гаусс рассмотрел последовательность пар положительных чисел $\{\alpha_n,\ \beta_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ или плоских векторов, где α_0, β_0 заданы $(\alpha_0>\beta_0)$, и

$$\alpha_n=\frac{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}}{2},\quad \beta_n=\sqrt{\alpha_n\beta_n}.$$

При $n \to \infty$ последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ стремятся к общему пределу $a = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n$ — «арифметико-геометрическому среднему чисел α_0, β_0»

$$a = a(\alpha_0, \beta_0) = \frac{\pi}{2G}, \qquad G = \frac{1}{\alpha_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2 - \beta_0^2}{\alpha_0^2}\sin^2\varphi}}.$$

Пример 12. Рассмотрим последовательности частичных сумм $s_n = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ степенного ряда для e^x. Обозначая $\alpha_n = n$, $\beta_n = \frac{x^n}{n!}$, имеем: $(\alpha_0, \beta_0, s_0) = (0, 1, 1)$. Получаем итерационную последовательность (α_n, β_n, s_n) вида (2.69)

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + 1, \quad \beta_n = \beta_{n-1}\frac{x}{\alpha_n}, \quad s_n = s_{n-1} + \beta_n.$$

Формула дает единообразную схему последовательного построения (α_n, β_n, s_n) (и значит и s_n) для $n = 1, 2, 3, \ldots$ Такое единообразие перехода от одного члена итерационной последовательности к следующему ее члену очень удобно для вычислений на программно управляемых машинах.

Итерационный процесс. Обобщим понятия § 2, п. 6 на операторы из E_n в E_n.

Пусть задан непрерывный оператор f из E_n в E_n:

$$Y = f(X), \quad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

или, в координатной форме,

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Исследуем уравнение

$$X = f(X) \tag{2.70}$$

или, в координатной форме, систему уравнений

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.71}$$

Образуем итерационную последовательность элементов

$$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_m, \ldots; \quad X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}),$$

где $X_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ — произвольный элемент E_n,

$$X_{m+1} = f(X_m) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.72}$$

а в координатной форме

$$x_{m+1, i} = f_i(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.73}$$

Если последовательность X_m *сходится к* X^*, *то* X^* *есть решение уравнения* (2.70).

Заметим, что решение X^* уравнения называется *неподвижной точкой преобразования* $Y = f(X)$.

8. Принцип сжатых отображений. Введем в пространстве E_n норму (см. § 1, п. 2). Оператор (преобразование) f из E_n в E_n называется *сжатым*, если существует такая константа q $(0 < q < 1)$, что для любых X и X_1 из E_n

$$\|f(X_1) - f(X)\| \leqslant q\|X_1 - X\|. \tag{2.74}$$

Следующая теорема одновременно дает и условие существования неподвижной точки преобразования $Y = f(X)$, т. е. решения уравнения (2.70), и условие сходимости итерационного процесса (2.72).

Теорема 10 (принцип сжатых отображений). *Если отображение* $Y = f(X)$ *сжатое* (*т. е. выполняется условие* (2.74) *при* $q < 1$), *то*:

1) *Существует решение* $X = X^*$ *уравнения* (2.70), *т. е. неподвижная точка* X^* *преобразования* $Y = f(X)$.

2) *Это решение единственное.*

3) *При любом выборе начального приближения* X_0 *итерационный процесс* (2.72) *сходится к решению* X^*:

$$X^* = \lim_{m \to \infty} X_m. \tag{2.75}$$

4) *Последовательность* X_m *сходится к* X^* *со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем* q, *а именно*:

$$\|X^* - X_n\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\|X_1 - X_0\|. \tag{2.76}$$

Приведем некоторые достаточные условия того, что оператор представляет сжатое отображение в различных нормах. Предполагается, что функции $f_i(X) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ —

координаты оператора $f(X)$ — имеют непрерывные частные производные по всем аргументам.

Для выполнения условия (2.74), а значит и следствий теоремы, достаточно, чтобы

а) в евклидовой метрике

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} \right]^2 \leqslant q < 1, \tag{2.77}$$

б) в метрике $m_{(n)}$ (см. стр. 97):

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} \right| \leqslant q_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \quad n). \tag{2.77'}$$

Применение к решению систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \tag{2.78}$$

или, в векторной форме,

$$Y = AX + B, \tag{2.79}$$

$$A = \| a_{ij} \|, \quad B = (b_1, b_2, \quad b_n). \tag{2.80}$$

При любом начальном векторе $X_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ образуем систему векторов $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_m$,

$$X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \quad x_{mn}), \tag{2.81}$$

где

$$X_{m+1} = AX_m + B \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.82}$$

или, в координатной форме,

$$x_{m+1, i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{mj} + b_i \qquad (i = 1, 2, \quad n). \tag{2.83}$$

Из (2.77) и (2.77′) следует, что для сходимости последовательности векторов X_m при $m \to \infty$ к вектору-решению $X^*(x_1^*, x_2^*, \quad x_n^*)$ системы (2.79) или системы (2.78) достаточно, чтобы:

а) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = q < 1$

или

$$\text{б)}\ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = q_i < 1 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$
$$(q = \max q_i; \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

при этом точность $\|X^* - X_n\|$ n-го приближения X_n определяется формулой (2.76); в случае а) — норма евклидова, в случае б) — $m_{(n)}$.

§ 3. Выпуклые тела в n-мерном пространстве

Теория выпуклых тел в n-мерных пространствах была построена Г. Минковским; она нашла приложения во многих вопросах анализа, геометрии и теории чисел, а в последнее время — в новых разделах прикладной математики: в теории игр, в линейном программировании. На базе этой теории выросла теория n-мерных нормированных пространств, бесконечномерное обобщение которой играет большую роль в математическом анализе.

1. Основные определения. *Выпуклым множеством* в пространстве E_n называется такое множество, которое вместе с двумя своими точками A и B содержит и весь соединяющий их отрезок.

Частные случаи: *выпуклая область* Q — область, являющаяся выпуклым множеством, *выпуклое тело* $\bar{Q}$ — выпуклая область Q вместе с ее границей Γ. Точки области Q называются *внутренними*, точки Γ — *граничными* для Q.

На прямой: интервал — выпуклая область, отрезок — выпуклое тело. На плоскости: внутренность круга или треугольника — выпуклые области; круг и треугольник (вместе с границей) — выпуклые тела. В трехмерном пространстве: внутренность цилиндра, шара, куба — выпуклые области; цилиндр, шар и куб (вместе с границей) — выпуклые тела, причем шар и куб — ограниченные выпуклые тела, а цилиндр — бесконечное выпуклое тело.

Замкнутое выпуклое множество, лежащее в k-мерной плоскости и не лежащее ни в одной $(k-1)$-мерной плоскости, называется *k-мерным выпуклым телом* $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Точку будем называть *нульмерным выпуклым телом*. (Пустое множество также считается выпуклым.)

Выпуклое множество (тело) может быть ограниченным и неограниченным (см. все вышеприведенные примеры). Примером неограниченного выпуклого тела может служить *полупространство* в E_n, т. е. множество точек X, удовлетворяющее неравенству $(fX \leqslant C)$, где f — линейный функционал в E_n, C — константа; все пространство E_n и любая его гиперплоскость суть примеры неограниченных выпуклых множеств.

Пересечение выпуклых множеств в E_n есть выпуклое множество, пересечение выпуклых тел в E_n — выпуклое k-мерное тело $(k \leqslant n)$.

Выпуклый многогранник есть замкнутое выпуклое тело — пересечение конечного числа полупространств.

Выпуклой оболочкой множества M в E_n называется множество Q точек $X \in E_n$, представимых в виде

$$X = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i X_i, \tag{2.84}$$

где l — любое целое число, $l \leqslant n$, X_i — произвольные точки M, λ_i — произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1.$$

Пример 13. Выпуклая оболочка пары точек A и B есть соединяющий их отрезок; выпуклая оболочка трех точек, не лежащих на одной прямой, — треугольник; выпуклая оболочка четырех точек, не лежащих в одной плоскости, — тетраэдр с вершинами в этих точках.

Выпуклая оболочка множества M есть пересечение всех выпуклых множеств, заключающих M, или наименьшее выпуклое множество, заключающее M. Каждый ограниченный выпуклый многогранник есть выпуклая оболочка конечного числа точек — вершин этого многогранника.

Крайние точки. Точка A называется *крайней точкой выпуклого тела* Q, если A не является внутренней точкой любого отрезка, принадлежащего Q.

Каждая крайняя точка Q есть его *граничная точка*; но не всякая граничная точка Q является его крайней точкой. Например, для многогранника (многоугольника) крайними точками являются лишь его вершины. Для круга и шара все граничные точки являются крайними. В дальнейшем под выпуклым телом будем понимать лишь ограниченное выпуклое тело.

Выпуклое тело Q есть выпуклая оболочка его крайних точек.

2. Выпуклые функции. Функция $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная в E_n (или на выпуклом множестве Q из E_n), на-

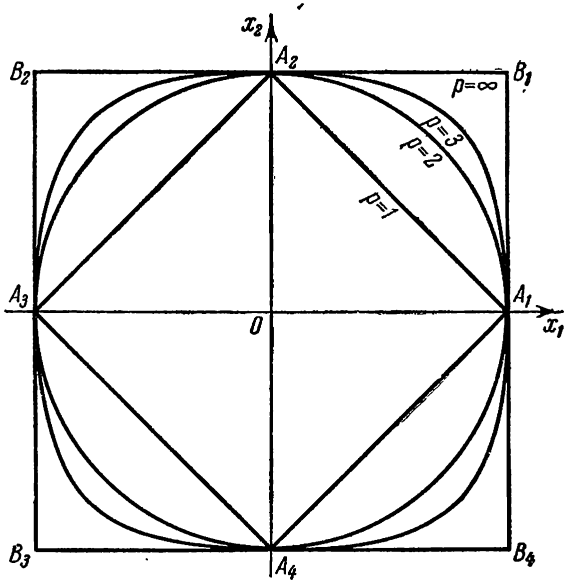

Рис. 2.

зывается *выпуклой*, если для любых X и Y из E_n (из Q) выполняется неравенство

$$f\left(\frac{X+Y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(X)+f(Y)] \tag{2.85}$$

(и *вогнутой*, если выполняется обратное неравенство).

Выпуклая функция удовлетворяет и более общему неравенству:

$$f[(1-t)X+tY] \leqslant (1-t)f(X)+tf(Y) \tag{2.85'}$$

для любого t из $[0, 1]$.

О выпуклых функциях одного переменного см. гл. I, § 3, п. 17.

Если $f(X)$ — *выпуклая функция*, c_0 — *ее нижняя граница в* E_n (*в* Q), *то при любом* $c \geqslant c_0$ *множество точек из* E_n (*из* Q), *удовлетворяющих неравенству*

$$f(X) \leqslant c,$$

есть выпуклое тело (*множество*).

Пример 14. На плоскости $E_2(x_1, x_2)$ функции

$$f_p(x_1, x_2) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$$

при $p \geqslant 1$ суть выпуклые функции. При $p \to \infty$ $f_p(x_1, x_2)$ стремится к функции $f_\infty(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2|)$ (см. рис. 2). Линии $f_p(x_1, x_2) = 1$ при разных p приведены на рисунке. Все они проходят через точки $A_1(1, 0)$, $A_2(0, 1)$, $A_3(-1, 0)$, $A_4(0, -1)$.

Линия $f_\infty(x_1, x_2) = 1$ есть граница квадрата с вершинами в точках $B_1(1, 1)$, $B_2(-1, 1)$, $B_3(-1, -1)$, $B_4(1, -1)$.

Линия $f_1(x_1, x_2) = 1$ есть граница квадрата с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4.

Линии $f_p = 1$ при $1 < p < \infty$ расположены между этими двумя линиями.

Линия $f_2(x_1, x_2) = 1$ есть окружность радиуса 1.

Фигуры $f_p \leqslant 1$, ограниченные этими линиями, выпуклые. При $p < 1$ такие фигуры уже не выпуклые. Например, при $p = \frac{2}{3}$ получим фигуру, ограниченную астроидой.

3. Выпуклые тела и нормы векторов. Пусть Q—выпуклое тело в E_n, заключающее внутреннюю точку θ. Каждая точка X из E_n представима (и притом при $X \neq \theta$ однозначно) в виде $X = \lambda X_0$, где $\lambda > 0$, X_0 — точка границы Q. Если X лежит вне Q, то $\lambda > 1$; если X лежит внутри Q, то $\lambda < 1$; если X лежит на границе Q, то $\lambda = 1$. Точка θ представима в виде $0 \cdot X_0$ (т. е. для точки θ число $\lambda = 0$).

Определим теперь в E_n функцию $\varphi_Q(X)$ следующим образом: в точке $X = \lambda X_0$

$$\varphi_Q(X) = \lambda;$$

$\varphi_Q(X)$ больше, равно или меньше 1 в зависимости от того, лежит ли X вне, внутри или на границе Q;

$$\varphi_Q(\theta) = 0.$$

$\varphi_Q(X)$ *есть выпуклая функция.* Тело Q есть множество точек E_n, для которых $\varphi_Q(X) \leqslant 1$, граница Q определена уравнением $\varphi_Q(X) = 1$.

Свойства функции $\varphi_Q(X)$:

1) $\varphi_Q(X) \geqslant 0$, причем лишь при $X = \theta$ имеем $\varphi_Q = 0$.

2) При $\lambda \geqslant 0$ $\varphi_Q(\lambda X) = \lambda\varphi_Q(X)$ (что означает положительную однородность функции).

3) $\varphi_Q(X+Y) \leqslant \varphi_Q(X) + \varphi_Q(Y)$.

Если Q есть центральное симметричное выпуклое тело с центром в θ (т. е. из $X \in Q$ следует $-X \in Q$), то добавляется свойство

$$\varphi_Q(\lambda X) = |\lambda|\,\varphi_Q(X) \quad \text{при} \quad \lambda < 0.$$

Свойство 2) переходит в более сильное:

2′) $\varphi_Q(\lambda X) = |\lambda|\,\varphi_Q(X)$

при любом действительном λ. Если дана функция φ, удовлетворяющая условиям 1)—3), то множество Q, определенное неравенством $\varphi_Q(X) \leqslant 1$, есть выпуклое тело, а при выполнении условия 2′) — центрально-симметрическое выпуклое тело с центром в θ.

Евклидова норма $\|X\|$ вектора X в E_n удовлетворяет условиям 1), 2′), 3). Можно обобщить понятие нормы вектора в n-мерном пространстве: в качестве *нормы* можно взять любую функцию $\varphi(X)$, удовлетворяющую условиям 1), 2), 3). Будем такое пространство обозначать через $E_{n,\varphi}$.

Если $\|X\| = \varphi(X)$, то условия 1)—3) перепишутся в виде:

1) $\|X\| \geqslant 0$, и лишь при $X = 0$ имеем $\|X\| = 0$.

2) При $\lambda > 0$ имеем $\|\lambda X\| = \lambda\,\|X\|$.

3) $\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$ (*аксиома треугольника*).

При четности φ условие 2) заменится более сильным:

2′) $\|\lambda X\| = |\lambda|\,\|X\|$ (при любом λ).

Пространства E_n, в которых введена норма, удовлетворяющая приведенным выше условиям, называются *нормированными.* Например, евклидовы пространства — нормированные (см. § 1, п. 7).

4. Опорные гиперплоскости. Рассмотрим линейную форму $fX = \sum_{i=1}^{n} l_i x_i$ в E_n, гиперплоскость $(fX = C)$ и полупространство ($fX \leqslant C$). Гиперплоскость ($fX = C$) называется *опорной к выпуклому телу* Q, если Q лежит целиком в полупространстве ($fX \leqslant C$) и если эта гиперплоскость имеет общие точки с границей Q.

Пример 15. В двумерном случае опорные гиперплоскости переходят в *опорные прямые*. Для круга опорные прямые совпадают с его касательными. Для треугольника опорные прямые — это три прямых, на которых лежат его стороны, а также все прямые, проходящие через его вершины и лежащие в его внешних углах. В трехмерном пространстве опорные гиперплоскости переходят в *опорные плоскости*; для шара опорные плоскости — это его касательные плоскости, для куба — плоскости его граней и другие плоскости, проходящие через ребра или только через вершины куба и не пересекающие внутренней части куба.

Пусть уравнение опорной гиперплоскости будет

$$fX = C. \tag{2.86}$$

Теорема 11. *Число C в правой части* (2.86) *определяется равенством*

$$C = \max_{X \in Q} fX. \tag{2.87}$$

Таким образом, уравнение опорной гиперплоскости имеет вид

$$fX = \max_{X \in Q} fX. \tag{2.88}$$

Теорема 12. *Линейный функционал fX достигает своего максимума C на Q в крайней точке Q, т. е. пересечение ($fX = C$) и Q содержит точку, крайнюю для Q.*

Следствие. Каждая опорная гиперплоскость к телу Q проходит через одну из его крайних точек (в частности, каждая опорная гиперплоскость к многоугольнику проходит через одну из его вершин).

5. Опорные функции и сопряженные пространства. Пусть в пространстве E_n введена норма $\|X\| = \varphi_n(X)$ и Q есть замкнутая *единичная сфера*: $Q = (\|X\| \leqslant 1)$; *Q есть выпуклое тело в E_n.*

Если

$$lX = \sum_{i=1}^{n} l_i X_i$$

есть линейная форма в $E_n = E_{n\varphi}$, то соответственная опорная гиперплоскость к Q определяется уравнением

$$lX = C \left(= \max_{\|X\| \leqslant 1} lX\right). \tag{2.89}$$

Каждая ~~линейная~~ форма lX является вектором l с компонентами $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Совокупность таких форм образует n-мерную линейную систему L_n. Можно ввести в L_n норму, именно, положить:

$$\|l\|^* = \psi(l) = \max_{\|X\| \leqslant 1} lX. \tag{2.90}$$

Эта норма удовлетворяет вместе с нормой $\|X\|$ условиям 1), 2), 3) (см. п. 3) или соответственно 1), 2′), 3).

Имеем:

$$|lX| \leqslant \|l\|^* \|X\|. \tag{2.91}$$

Это неравенство есть обобщение неравенства (2.7) для евклидовой метрики. Уравнение (2.89) запишется в виде

$$lX = \|l\|^*. \tag{2.92}$$

Сопряженные пространства. Введенное таким образом пространство $L_n = E_{n\psi}$ линейных форм в $E_{n\varphi}$ называется *сопряженным* к исходному пространству $E_{n\varphi}$.

Применяется запись:

$$E_{n\psi} = E^*_{n\varphi}. \tag{2.93}$$

Для евклидова пространства сопряженное пространство также евклидово.

Теорема 13 (Минковского). *Если пространство $E_{n\psi}$ считать исходным, то сопряженным к нему будет пространство $E_{n\varphi}$*

$$E^*_{n\psi} = E_{n\varphi} \tag{2.94}$$

(*пространство, сопряженное к сопряженному, есть исходное*).

Такое соотношение взаимной сопряженности пространств $E_{n\varphi}$ и $E_{n\psi}$ называется *рефлексивностью*. Функции $\psi(X)$ и $\psi(l)$ называются *взаимными*; они связаны соотношением

$$\max_{\varphi(X) \leqslant 1} lX = \psi(l), \qquad \max_{\psi(l) \leqslant 1} lX = \varphi(X). \tag{2.95}$$

Соответственно выпуклые тела Q и Q^*, определенные неравенствами $\varphi X \leqslant 1$, $\psi l \leqslant 1$, называются также *взаимными*. (Для бесконечных пространств теорема Минковского уже, вообще говоря, не верна.)

Пример 16. Пусть $l_{n,p}$ $(p \geqslant 1)$ есть n-мерное пространство с нормой

$$\|X\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

При $p > 1$ имеем $l^*_{n,\,p} = l_{n,\,q}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

При $p = 2$ (случай евклидовой нормы) имеем $q = 2$ (n-мерное евклидово пространство $l_{n,2}$, сопряженное само себе: $l^*_{n,\,2} = l_{n,\,2}$).

Пример 17. Пусть $l_{n,1}$ есть n-мерное пространство с нормой

$$\|X\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

m_n — n-мерное пространство с нормой

$$\|Y\| = \max(|y_1|, |y_2|, \quad |y_n|);$$

имеем:

$$l^*_{n,\,1} = m_n, \quad m^*_n = l_{n,\,1}.$$

Всякая линейная функция YX в $E_{n\varphi}$ может рассматриваться как скалярное произведение векторов X из $E_{n\varphi}$ и Y из $E_{n\psi}$.

6. Основные теоремы об опорных гиперплоскостях.

Теорема 14. *Пусть Q — выпуклое тело в n-мерном пространстве E_n. Через каждую точку границы Q можно провести гиперплоскость, опорную к Q.*

Обобщением этой теоремы является следующая

Теорема 15. *Проведем через внутреннюю точку A n-мерного выпуклого тела Q из E_n k-мерную плоскость L_k $(k < n)$. Она высекает из Q k-мерное выпуклое тело Q_k. Пусть L_{k-1} есть $(k-1)$-мерная плоскость в L_k, опорная к Q_k. Можно провести $(n-1)$-мерную гиперплоскость L_{n-1} в E_n, опорную к Q и заключающую L_{k-1}.*

Пусть в k-мерном линейном многообразии $E_k \subset E_n$ $(1 \leqslant k < n)$ задана линейная форма $l_k X$. Линейная форма $l_n X$ во всем пространстве E_n называется *расширением* формы l_k, если для $X \in E_k$

$$l_n X = l_k X.$$

Форма l_k в L_k имеет норму

$$\|l_k\|_{L_k} = \max_{\|X\| \leqslant 1,\ X \in E_k} l_k X.$$

Форма l_n в E_n имеет норму

$$\|l_n\| = \|l_n\|_{L_n} = \max_{\|X\| \leqslant 1} l_n X.$$

Отсюда следует: $\|l_n\| \geqslant \|l_k\|_{L_k}$, т. е. *при расширении линейной формы ее норма может только увеличиться.*

Теорема 16. *Любую линейную форму $l_k X$, определенную в k-мерном многообразии L_k из E_n, $1 \leqslant k < n$, можно распространить на все пространство E_n без изменения нормы.*

Эта теорема распространяется на бесконечные пространства (*теорема Банаха — Хана*).

7. Связь между взаимными выпуклыми телами. Пусть Q и Q^* — единичные сферы в E_n и E_n^*. Установим связь между точками их границ — взаимную, но не однозначную.

Уравнение (2.89) опорной плоскости к Q в E_n можно записать в виде

$$Y_0 X = \sum_{i=1}^{n} y_{0i} x_i = 1.$$

В этом случае (см. (2.92)) $\|Y_0\|^* = 1$. Формула (2.92) перейдет в следующую:

$$Y_0 X = \|Y_0\|^* = 1. \tag{2.96}$$

Отнесем каждой точке X_0 из E_n, для которой $\|X_0\| = 1$ (т. е. точке границы Q), все проходящие через нее опорные плоскости к Q, уравнения которых записаны по формуле (2.96). Имеем:

$$Y_0 X_0 = 1, \quad \|X_0\| = \|Y_0\|^* = 1. \tag{2.97}$$

Формула (2.97) дает выражение для тех $Y_0 \in E_n^*$, которые отвечают данному $X_0 \in E_n$; она носит симметрический относительно X_0 и Y_0 характер, что указывает на взаимность этого отображения.

Теорема 14 показывает, что каждому X_0 из границы $Q(\|X_0\| = 1)$ отвечает по крайней мере один Y_0 из границы $Q^*(\|Y_0\|^* = 1)$.

Пример 18. На плоскости m_2 сфера

$$(\|X\| = \max(|x_1|, |x_2|) \leqslant 1)$$

есть квадрат $Q = B_1B_2B_3B_4$; на плоскости $l_{1,2}$ сфера $(\|Y\| = |y_1| + |y_2| \leqslant 1)$ есть квадрат $Q^* = A_1A_2A_3A_4$. Точке $X_0(1, 1) = B_1$ границы квадрата Q отвечают те $Y_0(y_1, y_2)$, для которых

$$1 = Y_0X_0 = y_1x_1 + y_2x_2 = y_1 + y_2; \quad \|Y_0\| = |y_1| + |y_2| = 1,$$

значит, $y_1 = |y_1| \geqslant 0$, $y_2 = |y_2| \geqslant 0$.

Таким образом, эти точки заполняют сторону A_1A_2 квадрата Q^*.

Сторона B_1B_2 квадрата Q лежит на опорной прямой $X_1 = 1$, т. е. $1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 = 1$. Ей отвечает точка $Y_0(1, 0)$ — вершина A_2 квадрата Q^*. Остальным вершинам Q отвечают остальные стороны Q^*, сторонам Q — вершины Q^* и обратно.

В трехмерном пространстве выпуклые тела Q и Q^* могут быть выпуклыми многогранниками лишь одновременно, причем вершинам Q отвечают грани Q^*, ребрам Q — ребра Q^*, граням Q — вершины Q^* и обратно. Такие многогранники называются *взаимными*. Например, если Q — куб, то Q^* — октаэдр (и обратно); если Q — додекаэдр, то Q^* — икосаэдр (и обратно).

В n-мерном случае Q и Q^* могут быть многогранниками лишь одновременно, k-мерным граням $Q (0 \leqslant k \leqslant n-1)$ отвечают $(n-k-1)$-мерные грани Q^*.

8. Конус. Касательный конус. *Конусом* K в E_n с вершиной в $X_0 \in E_n$ называется множество точек E_n, отличное от всего E_n, и такое, что если X принадлежит K, то и весь луч (tX), $0 \leqslant t < \infty$, принадлежит K. Мы будем без оговорок считать, что конус K является выпуклым телом. Такой конус вместе с двумя своими лучами, образующими острый угол, содержит и весь угол. На плоскости такие конусы —

это углы, не превосходящие π. В трехмерном пространстве примерами конусов являются двугранные углы, не превосходящие π, обычные круглые конусы или правильные пирамиды, неограниченно продолженные, и т. д.

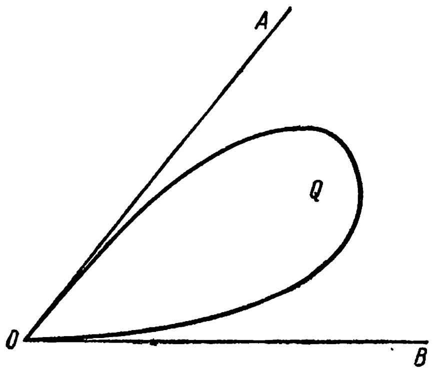

Рис. 3.

Пусть X_0 — точка границы выпуклого тела Q в E_n; обозначим через $K(X_0)$ наименьший конус с вершиной в X_0, содержащий Q; этот конус состоит из всех лучей, соединяющих X_0 с точками Q и предельных для них лучей. Назовем границу этого конуса *касательной конической гиперповерхностью* к Q в точке X_0; возможны два случая:

1) Конус $K(X_0)$ совпадает с целым полупространством, его граница есть единственная опорная в точке X_0 гиперплоскость к Q, которая «касается» Q в точке X_0.

2) Конус $K(X_0)$ есть правильная часть полупространства; через точку X_0 проходит бесконечное множество опорных к Q гиперплоскостей. Такую точку называем *точкой заострения*.

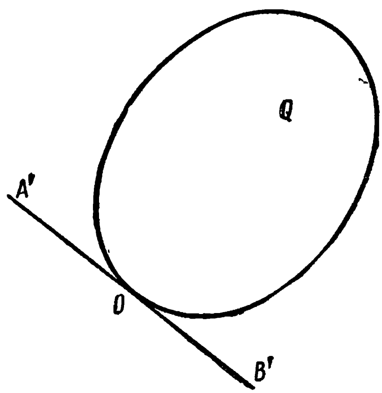

Рис. 4.

Пример 19. На плоскости конус $K(X_0)$ превращается в угол, ограниченный двумя касательными к Q в точке $X_0 = 0$ лучами (лучи OA, OB на рис. 3); если этот угол равен π, то оба луча образуют единственную опорную прямую (прямая $A'B'$ на рис. 4), касающуюся границы Q в точке O. Если угол меньше π, то точка O есть *точка заострения*, через O проходит бесконечное множество опорных прямых.

Пример 20. Пусть Q — выпуклый многогранник в E_3. Если точка X_0 лежит внутри его грани, то $K(X_0)$ — полупространство, ограниченное плоскостью грани, единственной опорной к Q плоскостью в точке X_0. Если X_0 лежит внутри ребра AB, то $K(X_0)$ есть двугранный угол, меньший π, ограниченный плоскостями граней, сходящихся в AB; существует бесчисленное множество опорных плоскостей к Q в точке X_0, все они проходят через ребро AB. Если X_0 есть вершина Q, то $K(X_0)$ есть многогранный угол с вершиной в X_0, ограниченный плоскостями сходящихся в X_0 граней; точки ребер, и тем более вершины Q, суть точки заострения.

9. Теорема Хелли. Приведем интересную теорему о пересечении выпуклых тел.

Теорема 17. *Пусть в E_n дано произвольное множество выпуклых тел $\{Q\}$, из которых хотя бы одно ограничено. Если любые $n+1$ из них имеют общую точку, то существует точка, общая для всех тел из $\{Q\}$.*

Например, если на прямой задано такое произвольное множество отрезков, что любая пара из этих отрезков имеет общую точку, то существует точка, общая всем отрезкам.

10. Линейные операции над множествами. Определение. Пусть A и B произвольные множества из E_n. *Векторной суммой* $A+B$ этих множеств назовем множество $\{X\}$ точек из E_n, представимых в виде $X=X_1+X_2$, где $X_1 \in A$, $X_2 \in B$.

Пример 21. Если A произвольное множество, a — одна точка (вектор), то $A+a$ есть множество, полученное параллельным переносом (сдвигом) множества A на вектор a.

Пример 22. Если A — ось x, B — ось y, то $A+B$ есть вся плоскость.

Пример 23. Если A в E_n есть n-мерная замкнутая сфера радиуса ρ с центром в θ, то $A+B$ есть «слой» толщиной ρ вокруг B, т. е. множество точек E_n, удаленных от B на расстояние, меньшее или равное ρ.

Теорема 18. *Векторная сумма выпуклых множеств (тел) есть выпуклое множество (тело).*

Определение. Если λ есть некоторое число, A — множество в E_n, то λA есть множество всех точек вида λX, где $X \in A$.

Подобным преобразованием множества A с коэффициентом преобразования $\lambda > 0$ называется преобразование множества A в множество λA. *Симметрическим отображением* A относительно центра θ называется преобразование множества A в $-A$.

При $\lambda = 0$ множество λA состоит из одной точки θ.

Если A — выпуклое множество (тело), то λA есть выпуклое множество (тело).

Если A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — выпуклые множества (тела), то $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ — выпуклое множество (тело) при любой системе неотрицательных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Пусть T_1 $(l = C_1)$ и T_2 $(l = C_2)$ — две параллельные опорные гиперплоскости к выпуклым телам Q_1 и Q_2, а $(l_1 \leqslant C_1)$, $(l_1 \leqslant C_2)$ — отвечающие им полупространства, содержащие соответственно Q_1 и Q_2; t_1, t_2 — произвольные положительные числа. Тогда $t_1 T_1 + t_2 T_2$ — параллельная им опорная гиперплоскость $(l = t_1 C_1 + t_2 C_2)$ тела $Q = t_1 Q_1 + t_2 Q_2$, лежащего в полупространстве $(l \leqslant t_1 C_1 + t_2 C_2)$.

Теорема 19 (Брунна — Минковского). *Пусть в E_n заданы выпуклые тела A_0 и A_1 и «линейная система» выпуклых тел $A_t = tA_0 + (1-t) A_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; n-мерные объемы J_n тел A_0, A_1 и всех A_t связаны неравенством Брунна — Минковского*

$$\sqrt[n]{J_n(A_t)} \geqslant (1-t) \sqrt[n]{J_n(A_0)} + t \sqrt[n]{J_n(A_1)}. \qquad (2.98)$$

Случай равенства наступает тогда и только тогда, когда A_0 и A_1 — гомотетические выпуклые тела, т. е. получаются одно из другого подобным преобразованием и параллельным сдвигом ($A_1 = \tau A_0 + b$, $\tau \geqslant 0$, b — вектор).

Неравенство (2.98) доказано (в 1887 г.) Брунном; случай равенства — (в 1891 г.) Г. Минковским.

Неравенство (2.98) означает, что $\sqrt[n]{J_n(A_t)}$ есть вогнутая функция для любого t на $[0, 1]$.

Теорема остается справедливой и для невыпуклых тел, и вообще для любых множеств, если под $J_n(A)$ понимать внешнюю n-мерную меру множества A или меру в случае его измеримости (см. [7]).

Теорема Брунна — Минковского применяется при доказательстве изопериметрических и ряда других геометрических свойств выпуклых тел.

ГЛАВА III

РЯДЫ

Введение

В главе I рассматривались бесконечные последовательности и их пределы. С последовательностями тесно связаны *бесконечные ряды*, или просто *ряды*,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.1}$$

— «суммы бесконечного множества слагаемых».

Ряды весьма широко используются в самых различных разделах математического анализа и при решении прикладных задач, являясь одним из наиболее универсальных и эффективных средств как исследования, так и вычисления.

Примеры рядов — бесконечные геометрические прогрессии — встречались уже в античной математике. В процессе создания анализа бесконечно малых появились ряды, с помощью которых вычислялись значения тех или иных функций: ряд для логарифма у Меркатора, ряды для $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $(1+x)^\alpha$ и т. д. у Ньютона. Весьма широко пользовался рядами для представления функций в разнообразных вычислениях Эйлер, причем наряду со степенными рядами у него применяются тригонометрические ряды. Эйлер использовал и расходящиеся ряды; он, по-видимому, первым стал заниматься улучшением сходимости рядов. Огромный фактический материал по рядам, накопленный к началу XIX века, поставил перед наукой задачу строгого обоснования теории рядов. Исследования в этом направлении Абеля, Гаусса, Коши и др. сыграли большую роль в обосновании математического анализа в целом.

Настоящая глава посвящена основам теории и практике вычисления рядов. В § 1 рассмотрены числовые ряды, в § 2 — функциональные ряды, в § 3 — различные методы их вычисления; о векторных рядах см. главу IV.

1. Основные понятия. Определение. *Рядом* называется символ (3.1), составленный из членов бесконечной последовательности $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Каждому ряду отвечает последовательность $\{s_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ его *частичных сумм*, где

$$s_1=a_1,\quad s_2=a_1+a_2,\qquad\qquad s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, \tag{3.2}$$

Пример 1. Для ряда

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\qquad=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

имеем

$$s_1=1,\quad s_2=\frac{4}{3},\qquad\qquad s_n=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

При рассмотрении последовательности частичных сумм могут встретиться следующие два случая.

Случай 1. Последовательность $\{s_n\}$ имеет определенный конечный предел

$$S=\lim_{n\to\infty}s_n.$$

Этот предел называют *суммой ряда* (3.1) и записывают:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n. \tag{3.3}$$

В примере 1

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}.$$

Случай 2. Последовательность $\{s_n\}$ не имеет конечного предела.

Пример 2.

$$1+2+3+\ \ldots\ +n+\qquad=\sum_{n=1}^{\infty}n;$$

$$s_1=1,\quad s_2=3,\qquad\qquad s_n=\frac{(1+n)\,n}{2},$$

При $n\to\infty$ частичная сумма $s_n\to\infty$.

Пример 3.

$$1-1+1-1+\quad=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$$

$$s_1=1,\quad s_2=0,\quad s_3=1,\ \ldots,\quad s_n=\begin{cases}0 & \text{при } n \text{ четном},\\ 1 & \text{при } n \text{ нечетном}.\end{cases}$$

Пример 4.

$$1-2+4-8+\quad=\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n-1};$$

$$s_1=1,\quad s_2=-1,\quad s_3=3,\quad s_4=-5,\qquad s_n=\frac{1-(-2)^n}{3}.$$

В случае 1 ряд называется *сходящимся*, в случае 2 (примеры 2, 3, 4) — *расходящимся*.

Пример 2 иллюстрирует важный частный случай расходящихся рядов, когда $s_n\to\infty$ (или $s_n\to-\infty$); пример 3 — случай, когда s_n «колеблется», оставаясь ограниченной; пример 4 — случай, когда s_n «колеблется», но является неограниченной.

В этом параграфе рассматриваются лишь сходящиеся ряды. Для сходящегося ряда (3.1) сумма S ряда может быть представлена в виде

$$S=s_n+R_n, \tag{3.4}$$

где

$$R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\quad=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k \tag{3.5}$$

и носит название *остатка* или *остаточного члена ряда*.

Под *вычислением* (или *суммированием*) *ряда* понимают нахождение суммы ряда S.

Таким образом, для вычисления ряда следует убедиться в его сходимости.

Точное суммирование ряда (некоторые приемы точного суммирования будут указаны ниже) удается выполнить лишь для узкого класса рядов. Большей же частью сумма ряда определяется приближенно. При приближенном суммировании сумму S заменяют частичной суммой s_n.

Из самого определения суммы сходящегося ряда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}(S-s_n)=0. \tag{3.6}$$

Это показывает, что при достаточно большом n остаточный член R_n может быть сделан сколь угодно малым по абсолютной величине.

Для обеспечения требуемой точности при замене S на s_n возникает необходимость оценки разности

$$S - s_n = R_n,$$

т. е. остаточного члена.

Вместе с тем, для практического удобства расчетов требуется, чтобы число членов n частичной суммы s_n, которое следует взять для достижения необходимой точности, было невелико. Существуют ряды, для вычисления которых с достаточной точностью пришлось бы брать n порядка тысяч и даже десятков тысяч. О таких рядах говорят, что они *медленно сходятся*.

Пример 5. Для вычисления суммы ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

с точностью до 0,001 необходимо просуммировать тысячу членов ряда.

Отсюда и возникает вопрос об улучшении сходимости ряда, т. е. таком его преобразовании, после которого для вычисления ряда с той же точностью требуется меньше членов частичной суммы s_n преобразованного ряда. Итак, для вычисления рядов основными вопросами являются: сходимость, оценка остаточного члена, улучшение сходимости.

2. Некоторые признаки сходимости рядов. Признак Коши сходимости последовательностей (3.2) в применении к рядам принимает следующую форму.

Признак Коши. Для сходимости ряда (3.1) необходимо и достаточно, чтобы при любом данном $\varepsilon > 0$ существовало такое n_ε, что

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

для всякого $n > n_\varepsilon$ и для любого целого положительного m.

Из этого признака при $m = 1$ вытекает важное следствие.

Если ряд (3.1) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю с ростом n:

$$a_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Это условие является необходимым, но не достаточным для сходимости ряда.

Пример 6. *Гармонический ряд*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\quad =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится, хотя $a_n=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$.

Признак Коши является самым общим необходимым и достаточным критерием для установления сходимости или расходимости ряда.

Однако обычно непосредственное его применение затруднительно. В теории рядов получен целый ряд достаточных признаков сходимости и расходимости рядов разной степени общности, которые получили широкое применение. Из них исторически первым является

Признак Даламбера. Если для ряда (3.1) существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q,$$

то ряд сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$. (В случае $q=1$ признак Даламбера ответа не дает.)

Более общим является

Признак Коши — Адамара. Обозначим

$$q=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Тогда ряд (3.1) сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$. (В случае $q=1$ признак ответа не дает.)

Принцип мажорирующих рядов. Ряд

$$b_1+b_2+\quad =\sum_{n=1}^{\infty}b_n \tag{3.7}$$

с неотрицательными членами b_n называется *мажорирующим* для ряда (3.1), если при любом n, начиная с некоторого $n \geqslant N$

$$|a_n| \leqslant b_n.$$

Из сходимости ряда (3.7) *следует сходимость ряда* (3.1).

На принципе мажорирования основаны многие признаки сходимости, в частности, признаки Даламбера и Коши — Адамара.

§ 1. Числовые ряды

1. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Если все члены ряда имеют одинаковые знаки, то ряд называется *знакопостоянным*. К числу таких рядов относятся ряды, все члены которых только положительные (*знакоположительные ряды*), и ряды, все члены которых только отрицательные (*знакоотрицательные ряды*).

Если не все члены ряда имеют одинаковые знаки, то ряд называют *знакопеременным*. В случае конечного числа членов, имеющих один знак, при исследовании сходимости их можно отбросить и рассматривать остающийся знакопостоянный ряд. Теория же рядов с *бесконечным* количеством положительных и отрицательных членов имеет некоторые принципиальные отличия от теории знакопостоянных рядов.

Частным случаем принципа мажорирования рядов является

Теорема 1. *Ряд с членами произвольных знаков*

$$a_1 + a_2 + \quad + a_n + \quad = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.8}$$

сходится, если сходится ряд

$$|a_1| + |a_2| + \quad + |a_n| + \quad = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \tag{3.8*}$$

составленный из абсолютных величин членов ряда (3.8).

В этом случае ряд (3.8) называют *абсолютно сходящимся*. Все сходящиеся знакопостоянные ряды — *абсолютно сходящиеся*.

Возможны случаи, когда ряд (3.8) сходится, а ряд (3.8*) расходится. Тогда ряд (3.8) называют *неабсолютно*, или *условно* сходящимся.

Пример 7. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

сходится и сумма его равна $S = \ln 2$.

Ряд же, составленный из абсолютных величин членов этого ряда, есть расходящийся гармонический ряд.

2. Свойства сходящихся рядов. Сочетательное свойство. Если члены сходящегося ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

объединить в произвольные группы, *не меняя расположения членов*:

$$a_1 + \ldots + a_{n_1},\ a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2},\ a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3},$$
$$\ldots,\ a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k},$$

где $\{n_k\}$ — частичная возрастающая последовательность номеров из натурального ряда, то ряд из сумм членов этих групп

$$(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots$$

всегда сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд. Этим свойством можно воспользоваться для улучшения сходимости рядов.

Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряд, полученный из него *любой* перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.

Неабсолютно сходящиеся ряды переместительным свойством не обладают. Более того, имеет место

Теорема 2 (Римана). *Можно так переставить члены неабсолютно сходящегося ряда, чтобы преобразованный ряд имел сумму, равную любому наперед заданному числу, или стал расходящимся.*

3. Общие признаки сходимости знакоположительных рядов. Если требуется определить сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{3.9}$$

то для этого выбираем другой ряд с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{3.10}$$

по нашему усмотрению, например, такой, чтобы сходимость и сумма его заранее были нам известны.

Введем обозначение:

$$R_m = \sum_{k=m}^{\infty} a_k; \tag{3.11}$$

R_m является *остаточным членом* ряда, который равен конечному положительному числу, если ряд (3.9) сходится, и ∞, если ряд (3.9) расходится;

$$A_k(l) = \frac{b_k}{a_{k+l}}, \tag{3.12}$$

где l — параметр, принимающий такие целочисленные значения, что $m+l \geqslant 0$, m — фиксированное целое положительное число;

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} A_k(l) = \underline{A}(l), \tag{3.13}$$

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} A_k(l) = \overline{A}(l). \tag{3.14}$$

Пусть

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} b_k = \underline{B}_m, \tag{3.15}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} b_k = \overline{B}_m; \tag{3.16}$$

в том случае, когда нижний и верхний пределы совпадают, т. е. когда существует предел, введем обозначения:

$$\lim_{k\to\infty} A_k(l) = A(l), \tag{3.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} b_k = B_m. \tag{3.18}$$

Имеют место следующие достаточные признаки сходимости ряда (3.9).

Признак I. *Если* $\underline{A}(l) > 0$ *и* $\underline{B}_m < +\infty$, *то ряд* (3.9) *сходится, если же* $-\infty < \underline{A}(l) \leqslant 0$ *и* $\underline{B}_m = -\infty$, *то ряд расходится.*

Признак II. *Если* $\overline{A}(l) < 0$ *и* $\overline{B}_m > -\infty$, *то ряд сходится, если же* $0 \leqslant \overline{A}(l) < +\infty$ *и* $\overline{B}_m = +\infty$, *то ряд расходится.*

Признак III. *Если* $A(l) > 0$ *и* $B_m < +\infty$ *или* $A(l) < 0$ *и* $B_m > -\infty$, *то ряд сходится; если же* $0 \leqslant A(l) < +\infty$ *и* $B_m = +\infty$ *или* $-\infty < A(l) \leqslant 0$ *и* $B_m = -\infty$, *то ряд расходится.*

Из признаков I, II и III путем соответствующего выбора вспомогательного ряда (3.10) можно получить, как частные случаи, ранее известные, а также новые достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (см. п. 5). Эти признаки содержат, в частности, также известный необходимый признак сходимости, утверждающий, что если ряд (3.9) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Оценки остаточных членов, соответствующие различным признакам сходимости. В том случае, когда для ряда (3.9) выполнен один из признаков сходимости I, II и III, можно дать и соответствующую оценку остаточного члена этого ряда.

1) Для признака I

$$\frac{B_m}{\sup\limits_{k\geqslant m} A_k(l)} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{B_m}{\inf\limits_{k\geqslant m} A_k(l)}, \tag{3.19}$$

где m такое, что все $A_k(l) > 0$; l — целочисленный параметр, удовлетворяющий условию $m+l \geqslant 0$.

2) Для признака II

$$\frac{B_m}{\inf\limits_{k\geqslant m} A_k(l)} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{B_m}{\sup\limits_{k\geqslant m} A_k(l)}, \tag{3.20}$$

где m такое, что все $A_k(l) < 0$ и $m+l \geqslant 0$.

3) Для признака III, если $A(l) > 0$, имеет место оценка (3.19), а если $A(l) < 0$ — оценка (3.20).

Для признака III бывает удобно пользоваться следующими частными случаями оценок (3.19) и (3.20):

а) Когда $A(l) > 0$ и последовательность $\{A_k(l)\}$ при $k \geqslant m$ монотонно возрастающая, то

$$\frac{B_m}{A(l)} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{B_m}{A_m(l)}. \qquad (3.21)$$

б) Когда $A(l) < 0$ и последовательность $\{A_k(l)\}$ при $k \geqslant m$ монотонно убывающая, то

$$\frac{B_m}{A_m(l)} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{B_m}{A(l)}. \qquad (3.22)$$

в) Когда $A(l) < 0$ и последовательность $\{A_k(l)\}$ при $k \geqslant m$ монотонно возрастающая, то имеет место (3.21).

г) Когда $A(l) > 0$ и последовательность $\{A_k(l)\}$ при $k \geqslant m$ монотонно убывающая, то имеет место (3.22).

Пример 8. Оценим остаточный член ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Полагая, например, $b_n = z_{n+1} - z_n$, где $z_n = -\frac{1}{2n^2}$, при условии $m > 1$ и $l \geqslant 0$, имеем

$$A_m(l) = \frac{(2m+1)(m+l)^3}{2m^2(m+1)^2},$$

$$A(l) = \lim_{m \to \infty} \frac{b_m}{a_{m+l}} = 1, \quad B_m = \lim_{n \to \infty} (z_{n+1} - z_m) = \frac{1}{2m^2}.$$

Легко проверить, что последовательность $\{A_m(0)\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ монотонно возрастающая, а последовательность $\{A_m(1)\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ — монотонно убывающая.

Следовательно, при $l = 0$ и $m \geqslant 1$, согласно (3.21), имеем

$$\frac{1}{2m^2} < R_m < \frac{(m+1)^2}{(2m+1)m^3},$$

а при $l = 1$, согласно (3.22),

$$\frac{1}{(2m+1)(m+1)} < R_{m+1} < \frac{1}{2m^2}.$$

Из последних двух неравенств, выбирая наибольшие нижние и наименьшие верхние значения, получим

$$\frac{1}{(2m-1)m} < R_m < \frac{(m+1)^2}{(2m+1)m^3}.$$

Этот пример показывает, что при одной и той же выбранной последовательности $\{b_n\}$ и при различных значениях индекса l можно получить оценки, не перекрывающие друг друга.

5. Частные признаки сходимости знакоположительных рядов. Оценки остаточных членов. Из общих признаков сходимости I, II и III (п. 3) следуют многие известные классические признаки сходимости рядов с положительными членами. Здесь приводятся некоторые из этих признаков и соответствующие им оценки остаточных членов (см. [8]).

1°. Обобщенный признак Даламбера. Следующие два признака можно рассматривать как некоторое обобщение приведенного ранее признака Даламбера.

Признак A. Если для некоторого фиксированного l

$$\overline{A}(l) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+l}} < 0, \tag{3.23}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если же

$$\underline{A}(l) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+l}} > 0, \tag{3.24}$$

то ряд расходится.

Признак B. Если для некоторого фиксированного l величина

$$A(l) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+l}}$$

отрицательная, то ряд сходится; если же она положительная, то ряд расходится.

Из признаков A и B, в частности, при $l=0$ получаем признак Даламбера (Введение, п. 2).

Если сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ установлена с помощью признаков A или B, то на основании оценки (3.20) имеем

$$\frac{-a_m}{\inf\limits_{k\geqslant m} \dfrac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+l}}} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{-a_m}{\sup\limits_{k\geqslant m} \dfrac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+l}}}. \tag{3.25}$$

Если последовательность $\left\{A_k(l)=\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+l}}\right\}$ при $k \geqslant m$ монотонно возрастающая, то

$$\frac{-a_m}{\dfrac{a_{m+1}-a_m}{a_{m+l}}} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{-a_m}{\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+l}}}. \tag{3.26}$$

Если же последовательность $\{A_k(l)\}$ при $k \geqslant m$ монотонно убывающая, то

$$\frac{-a_m}{\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+l}}} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{-a_m}{\dfrac{a_{m+1}-a_m}{a_{m+l}}}. \tag{3.27}$$

Пример 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}. \tag{3.28}$$

Нетрудно проверить, что если $l+1<0$, то последовательность $\left\{A_k(l)=\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+l}}\right\}$ для ряда (3.28), начиная с некоторого $k \geqslant N(l)$, отрицательна и монотонно убывает. Если $l+1>0$, то последовательность $\{A_k(l)\}$ отрицательна и монотонно возрастает.

Таким образом, на основании (3.27) при $l+1 \leqslant 0$, начиная с некоторого $m \geqslant N(l)$ (например, при $l=-1$, начиная с $m \geqslant 1$), имеем

$$\frac{1}{2^{m+l-1} m^2} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{(m+1)^2}{2^{m+l-1}(m+l)^2(m^2+4m+2)}.$$

При $l+1>0$ в этой оценке следует изменить знаки неравенства на обратные.

Например, полагая $m+l=6$ и, в соответствии с этим, придавая m и l следующие значения:

m	9	8	7	6	5	4
l	-3	-2	-1	0	1	2

мы убеждаемся в том, что наилучшая верхняя оценка достигается при $l=-1$, а наилучшая нижняя оценка — при $l=0$, и тогда получаем $0{,}000686 \leqslant R_6 \leqslant 0{,}000703$.

2°. Обобщенный признак Коши. Полагая $b_n = \rho^n$ и применяя признаки I, II (п. 3), получим следующий признак сходимости, который можно рассматривать как обобщение признака Коши — Адамара.

Признак C. Если для некоторого фиксированного l и $\rho < 1$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\rho^n}{a_{n+l}} > 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если же при некотором l и $\rho > 1$

$$0 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\rho^n}{a_{n+l}} < \infty,$$

то ряд расходится.

При $l = 0$ из этого признака получаем известный признак Коши — Адамара (Введение, п. 2).

Если сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ установлена с помощью признака C, то, согласно (3.19), при любом $m + l > 0$ будем иметь

$$\frac{\rho^m}{(1-\rho)\sup\limits_{k\geqslant m} \frac{\rho^k}{a_{k+l}}} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{\rho^m}{(1-\rho)\inf\limits_{k\geqslant m} \frac{\rho^k}{a_{k+l}}}. \qquad (3.29)$$

Здесь $\rho < 1$ — произвольное число, для которого $\varliminf_{n\to\infty} \frac{\rho^n}{a_{k+l}} > 0$.

Если последовательность $\left\{ A_k(l) = \frac{\rho^k}{a_{k+l}} \right\}$ при $k \geqslant m$ является монотонно возрастающей, то

$$\frac{\rho^m}{(1-\rho)\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\rho^k}{a_{k+l}}} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{a_{m+l}}{1-\rho}. \qquad (3.30)$$

Если же последовательность $\{A_k(l)\}$ при $k \geqslant m$ монотонно убывает, то

$$\frac{a_{m+l}}{1-\rho} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{\rho^m}{(1-\rho)\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\rho^k}{a_{k+l}}}. \qquad (3.31)$$

Пример 10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}} \qquad (0 \leqslant x < 1). \tag{3.32}$$

Нетрудно показать, что к ряду (3.32) при условии $m+l \geqslant 3$ может быть применена оценка (3.31).

Считая $\rho = x$, будем иметь

$$\frac{x^{m+l}}{(1-x)\sqrt[m+l]{m+l}} \leqslant R_{m+l} \leqslant \frac{x^{m+l}}{1-x}.$$

3°. Признак Раабе. Из общего признака III (п. 3), в частности, можно получить

Признак D. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если для любого целого $l \geqslant 0$ величина

$$A(l) = \lim_{n\to\infty} \frac{na_{n+1} - (n-1)a_n}{a_{n+l}} < 0, \tag{3.33}$$

и расходится, если

$$A(l) > 0.$$

При $l = 0$ получаем

Признак Раабе. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1,$$

и расходится, если, начиная с некоторого n,

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1.$$

Пример 11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}. \tag{3.34}$$

Сходимость этого ряда легко устанавливается применением признака D. Здесь можно использовать также оценки остаточного члена п. 4, соответствующие случаям 3), в) и 3), г).

Применяя оценку 3), в) (п. 4) при $m \geqslant 9$ и $l \geqslant 2$, получим

$$\frac{(m-1)(m+3)}{(2m-3)(m+l)(m+l+1)(m+l+2)} \leqslant R_{m+l} \leqslant \leqslant \frac{m-1}{2m(m+1)(m+2)}. \qquad (3.35)$$

Применяя же оценку 3), г) (п. 4) при $m+l>0$, $l \leqslant 1$ и $m > \frac{4l}{2l-3}$, будем иметь

$$\frac{(m-1)(m+3)}{(2m-3)(m+l)(m+l+1)(m+l+2)} \geqslant R_{m+l} \geqslant \geqslant \frac{m-1}{2m(m+1)(m+2)}. \qquad (3.36)$$

Сравнивая неравенства (3.35) и (3.36), например, при $m+l=12$, легко получим, что

$$0{,}00315 \leqslant R_{12} \leqslant 0{,}00337,$$

тогда как истинное значение $R_{12}=0{,}00320$.

4°. Признак Гаусса. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то, как указывалось ранее, признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если при этом отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ имеет вид

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^\lambda + pn^{\lambda-1} + \varphi(n)}{n^\lambda + qn^{\lambda-1} + \psi(n)},$$

где $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ имеют порядок ниже, чем $n^{\lambda-1}$, то сходимость и расходимость ряда устанавливается с помощью следующего признака.

Признак Гаусса. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $q-p>1$ и расходится при $q-p \leqslant 1$.

Пример 12. *Гипергеометрический ряд* при $x=1$ [7]

$$\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \ldots \qquad (3.37)$$

сходится при условии, что

$$\gamma > \alpha + \beta.$$

Заметим, что ряд (3.37) при любых действительных α, β, γ, начиная с некоторого номера n, знакопостоянен (предполагается, что ни одно из чисел α, β, γ не является отрицательным).

В данном случае, например, при $l = 0$ имеем

$$A_n(0) = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma+n} - (\gamma-\alpha-\beta)$$

и

$$A(0) = -(\gamma-\alpha-\beta) < 0.$$

Учитывая, что последовательность $\{A_n(0)\}$, начиная с $n > -\gamma$, будет монотонно возрастающей или монотонно убывающей, и воспользовавшись оценками (3.26) и (3.27), получаем

$$\frac{(m+\gamma)\,ma_m}{(m+\gamma)(\gamma-\alpha-\beta)-(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \lesseqgtr R_m \lesseqgtr \frac{ma_m}{\gamma-\alpha-\beta},$$

$$(m > -\gamma),$$

где

$$a_m = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{m!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}.$$

5°. Интегральный признак Коши. Пусть общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с возрастанием n монотонно убывает. Тогда, очевидно, можно подобрать бесконечное множество положительных функций $a(x)$, монотонно убывающих и непрерывных при $x > 0$, и таких, что

$$a(n) = a_n.$$

Пусть $a(x)$ — одна из этих функций. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится, смотря по тому, будет ли сходящимся или расходящимся несобственный интеграл

$$\int_{a}^{\infty} a(x)\,dx, \tag{3.38}$$

где $a \geqslant 1$.

Этот признак вытекает как частный случай из общих признаков I и II (п. 3), если положить, например,

$$b_n = \int\limits_n^{n+1} a(x)\,dx \quad \text{и} \quad l = 0.$$

Пример 13. Дан ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\sigma} n} \qquad (\sigma > 0). \tag{3.39}$$

Выберем в качестве $a(x)$ функцию $\dfrac{1}{x \ln^{1+\sigma} x}$ и положим $\alpha = 2$, тогда

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^{1+\sigma} x}\,dx = -\frac{1}{\sigma \ln^{\sigma} x}\Big|_2^{\infty} = \frac{1}{\sigma \ln^{\sigma} 2};$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 14. Дан ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}. \tag{3.40}$$

Выберем $a(x) = \dfrac{1}{x \ln x \ln \ln x}$ и положим $\alpha = 3$,

$$\int\limits_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x \ln \ln x}\,dx = \ln \ln \ln x \Big|_3^{\infty} = \infty,$$

следовательно, ряд расходится.

Пример 15. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}. \tag{3.41}$$

Выберем $a(x) = \dfrac{1}{x^{\sigma}}$ и положим $\alpha = 1$. Учитывая, что

$$\int \frac{dx}{x^{\sigma}} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} & \text{при } \sigma \neq 1, \\ \ln x & \text{при } \sigma = 1, \end{cases}$$

получаем:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma}} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma - 1} & \text{при } \sigma > 1, \\ \infty & \text{при } \sigma \leqslant 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд сходится при $\sigma > 1$ и расходится при $\sigma \leqslant 1$.

Отметим следующее:

1) В силу того, что выбор функции $a(x)$ в значительной мере произволен, то, вообще говоря, можно дать бесконечное множество оценок, соответствующих данному признаку.

2) Когда последовательность $\{a_n\}$ монотонна, то оценками, соответствующими интегральному признаку Коши, можно пользоваться независимо от того, с помощью какого признака будет доказана сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} \qquad (a > 1).$$

Пусть, например, $a(x) = \frac{x}{a^x}$. Функция $a(x)$ при $x > \frac{1}{\ln a}$ монотонно убывает. Поэтому, вычисляя

$$A_k = \frac{a^k}{k} \int_k^{k+1} x a^{-x}\, dx = \frac{a-1}{a \ln a} + \frac{a - \ln a - 1}{ka \ln^2 a}$$

и пользуясь оценкой (3.26), будем иметь

$$\frac{m(m \ln a + 1)}{a^{m-1}(a-1)\left(m \ln a + 1 - \frac{\ln a}{a-1}\right)} \leqslant R_m \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m \ln a + 1}{a^{m-1}(a-1)\ln a}, \qquad (m \geqslant 1).$$

6°. **Теорема Н. В. Бугаева, признак В. П. Ермакова.** Пусть $a(x)$ — функция, введенная при формулировке интегрального признака Коши, а $\delta(x)$ — некоторая положительная дифференцируемая функция, возрастающая с ростом x так, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\delta(x)} = 0$. Тогда на основании интегрального признака Коши можно получить следующую теорему.

Теорема 3 (Н. В. Бугаева). *Если функция $\delta'(x)\,a[\delta(x)]$ при достаточно большом x монотонна, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta'(n)\,a[\delta(n)]$ одновременно сходятся или расходятся.*

Таким образом, любой признак сходимости, примененный к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta'(n)\,a\{\delta(n)]$, в то же время будет давать признак сходимости для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Из теоремы Н. В. Бугаева, в частности, вытекает следующий

Признак В. П. Ермакова. Если

$$\lim_{m\to\infty} \frac{e^m a(e^m)}{a(m)} < 1,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если же

$$\lim_{m\to\infty} \frac{e^m a(e^m)}{a(m)} > 1,$$

то ряд расходится.

Полагая, например, $b_n = \int\limits_{n}^{n+1} \delta'(x)\,a[\delta(x)]\,dx$ и пользуясь общими оценками, приведенными в п. 4, можно получить бесконечное множество оценок $\left(\text{для остаточного члена ряда } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)$, которые соответствуют различным способам выбора функций $\delta(x)$.

7°. Признак Лобачевского. Если члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$$

монотонно убывают, то этот ряд сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m},$$

где p_m определяется из равенств

$$a(p_m) \geqslant 2^{-m}, \quad a(p_m+1) \leqslant 2^{-m}.$$

Можно также определить p_m из равенства

$$a(p_m) = 2^{-m},$$

если функция $a(x)$ монотонна и определена для любых значений x.

Пример 17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Из уравнения

$$\frac{1}{p_m^2} = 2^{-m}$$

определяем $p_m = 2^{\frac{m}{2}}$ и составляем ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}}.$$

Этот ряд является сходящейся геометрической прогрессией, и, следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

также сходится.

6. Сходимость знакопеременных рядов. Пусть дан знакопеременный ряд (3.8). Составим ряд (3.8*) из абсолютных величин членов ряда (3.8).

Для установления абсолютной сходимости ряда (3.8) к положительному ряду (3.8*) можно применить все признаки, изложенные выше для знакопостоянных рядов. Однако признаки сходимости ряда (3.8*), как указывалось, могут оказаться несправедливыми для ряда (3.8).

Знакочередующиеся числовые ряды. *Знакочередующимися* называют ряды, члены которых поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки. Для этих рядов справедлива

Теорема 4 (Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *монотонно убывают по абсолютной величине*:

$$|a_{n+1}| \leqslant |a_n| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и n-ый член стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то ряд сходится.

Оценка остаточного члена знакочередующегося ряда проста и эффективна.

Остаток знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} +$$

имеет знак своего первого члена a_{n+1} и меньше его по абсолютной величине:

$$|R_n| < |a_{n+1}|.$$

Более общими, чем критерий Лейбница, являются критерии сходимости Абеля и Дирихле.

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \tag{3.42}$$

где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — последовательности действительных чисел.

Признак Абеля. Ряд (3.42) сходится, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \tag{3.43}$$

сходится, а числа a_n образуют монотонную и ограниченную последовательность

$$|a_n| < K \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Пример 18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \frac{1}{3^{n-1}}; \qquad a_n = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, \qquad b_n = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Признак Дирихле. Ряд (3.42) сходится, если частичные суммы ряда (3.43) в совокупности ограничены:

$$|s_n| \leqslant M \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{3.44}$$

а числа α_n образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Предположение (3.44) является более общим, чем предположение о сходимости ряда (3.43), поэтому признак Абеля вытекает из признака Дирихле.

7. Бесконечные произведения и их сходимость. Пусть дана некоторая последовательность чисел (или функций)

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \qquad p_n, \tag{3.45}$$

Тогда символ

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 p_3 \qquad p_n \tag{3.46}$$

называют *бесконечным произведением.*

Произведения конечного числа взятых последовательно членов

$$P_1 = p_1,\ \ P_2 = p_1 p_2,\ \ P_3 = p_1 p_2 p_3,\ \ldots,\ P_n = p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n \tag{3.47}$$

называют *частичными произведениями.* Их последовательность будем обозначать символом $\{P_n\}$.

Пример 19.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\,\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\,\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}$$

Сходимость бесконечных произведений. Различают четыре основных случая.

1) Последовательность частичных произведений $\{P_n\}$ имеет конечный предел, отличный от 0:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P. \tag{3.48}$$

Этот предел называют *значением* произведения и пишут

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n. \tag{3.49}$$

Само произведение в этом случае называют *сходящимся*. В примере 19

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{n+3}{n+1} = \frac{1}{3}.$$

2) Последовательность $\{P_n\}$ стремится либо к $+\infty$, либо к $-\infty$.

Пример 20.

$$\prod_{n=1}^{\infty} n = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n \qquad P_n = n!; \quad \lim_{n\to\infty} n! = \infty.$$

3) Последовательность $\{P_n\}$ имеет пределом 0.

Пример 21.

$$p_n = \frac{1}{2} \text{ при любом } n,\ P_n = \frac{1}{2^n}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

4) Последовательность $\{P_n\}$ не имеет предела (например, колеблется).

Пример 22.

$$\prod_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\left(-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\right)\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\left(-\frac{4\cdot 7}{5\cdot 6}\right)\ldots, \ -\frac{1}{3} < P_n < \frac{1}{3}.$$

В последних трех случаях произведение называют *расходящимся*.

Выделение случая 3) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0\right)$ вносит некоторое отличие от классификации, принятой для бесконечных рядов. Однако это удобно для формулировки многих теорем о бесконечных произведениях.

Бесконечное произведение может быть представлено в форме

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P_m \pi_m, \tag{3.50}$$

где

$$P_m = p_1 p_2 \ldots p_m$$

— частичное произведение m первых членов, а

$$\pi_m = p_{m+1}p_{m+2}\ldots = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n \tag{3.51}$$

носит название *остаточного произведения*, которое аналогично остаточному члену ряда.

Теорема 5. *Если сходится произведение* (3.46), *то сходится при любом m и остаточное произведение* (3.51) (*если все $p_n \neq 0$*); *из сходимости остаточного произведения вытекает сходимость исходного произведения.*

Итак, отбрасывание конечного числа начальных множителей или присоединение в начале конечного числа множителей на сходимости бесконечного произведения не отражается.

Если бесконечное произведение сходится, то

$$\lim_{m\to\infty} \pi_m = 1. \tag{3.52}$$

Это вытекает из (3.50):

$$\pi_m = \frac{P}{P_m}$$

и из того, что $P \neq 0$.

Если бесконечное произведение сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1. \tag{3.53}$$

Это вытекает из цепи равенств:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{\lim P_n}{\lim P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

В случае сходящегося произведения $p_n > 0$, начиная с некоторого n. Это следует из (3.53). Ввиду теоремы 5, не нарушая общности, будем полагать все $p_n > 0$.

Существует связь между сходимостью бесконечных произведений и рядов.

Для того чтобы бесконечное произведение (3.46) было сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n. \tag{3.54}$$

Если S — сумма ряда (3.54), то

$$P = e^S. \tag{3.55}$$

Обозначая через s_n частичную сумму ряда (3.54), имеем

$$s_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{s_n}. \tag{3.56}$$

Из непрерывности логарифмической и показательной функции следует, что при стремлении P_n к конечному положительному пределу P частичная сумма s_n стремится к $\ln P$, и обратно, если существует конечный предел S, то для P предел равен e^S.

Удобно представить n-ый член бесконечного произведения в виде

$$p_n = 1 + a_n$$

и записывать произведение (3.46) в форме

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), \tag{3.57}$$

а ряд (3.54) в форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 + a_n). \tag{3.58}$$

Теорема 6. *Если для достаточно больших n все $a_n > 0$ (или $a_n < 0$), то для сходимости произведения* (3.57) *необходима и достаточна сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3.59}$$

Для сходимости (3.57) и (3.58) необходимо, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \text{отсюда} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1.$$

Для общего случая $a_n \gtrless 0$ бесконечное произведение (3.57) сходится, если вместе с рядом (3.59) сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \tag{3.60}$$

Произведение, приведенное в примере 19, может быть записано так:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Здесь

$$a_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Из нижеследующего ясно, почему в случае

$$P = 0$$

бесконечное произведение условно относят к «расходящимся».

Для того чтобы бесконечное произведение имело нулевое значение, необходимо и достаточно, чтобы ряд (3.54) или (3.58) имел суммой $-\infty$.

Это имеет место, например, когда $a_n < 0$ и ряд (3.59) расходится, или, если ряд (3.59) сходится, но расходится ряд (3.60).

Произведение (3.46) называют *абсолютно* сходящимся, когда *абсолютно* сходится ряд из логарифмов его множителей (3.54).

Абсолютно сходящееся произведение обладает переместительным свойством.

Для абсолютной сходимости произведения (3.57) необходима и достаточна абсолютная сходимость ряда (3.59).

Для примера 19 имеем

$$|a_n| = \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2\,\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 2\,\frac{1}{n^2}.$$

Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходящийся ряд (см. пример 15), следовательно, произведение сходится абсолютно.

Касаясь функциональных произведений, заметим, что их теория относится к теории числовых произведений таким же образом, как теория функциональных рядов относится к теории числовых рядов. Приведем пример функционального произведения.

Пример 23. Произведение

$$x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

при любом x изображает $\sin x$;

8. Двойные ряды. Основные понятия и определения. Наряду с обыкновенными (простыми, ординарными) бесконечными рядами в анализе и приложениях применяются кратные ряды, например двойные, тройные и т. д. Мы ограничимся здесь кратким очерком теории двойных рядов.

Определение. *Двойным рядом* называется символ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \quad \left(\text{или} \sum_{k,\, l=0}^{\infty} a_{kl}\right), \tag{3.61}$$

составленный из членов двойной последовательности $\{a_{kl}\}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$), которой отвечает другая двойная последовательность $\{s_{mn}\}$ частичных сумм

$$s_{mn} = \sum_{k,\, l=0}^{k=m-1,\; l=n-1} a_{kl}. \tag{3.62}$$

Если при одновременном и не зависящем друг от друга возрастании индексов m и n до бесконечности существует конечный предел

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} s_{mn} = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} a_{kl}, \tag{3.63}$$

то его называют суммой двойного ряда (3.61). В этом случае ряд (3.61) называется *сходящимся*. В противном случае ряд называется *расходящимся*.

Если члены a_{kl} просуммировать последовательно по одному индексу, а затем по другому, то такую двойную сумму будем называть *повторным рядом*. Очевидно, здесь возможны следующие два случая:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{kl}\right) \tag{3.64}$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right). \tag{3.65}$$

Повторный ряд (3.64) называется *сходящимся*, если сходятся ряды

$$A_l = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k_l} \tag{3.66}$$

(при любом фиксированном индексе l) и

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l. \tag{3.67}$$

Аналогично ряд (3.65) называется *сходящимся*, если сходятся ряды

$$B_k = \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \tag{3.68}$$

(при любом фиксированном индексе k) и

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k. \tag{3.69}$$

Введем обозначение

$$A = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{m \to \infty} s_{mn} \right). \tag{3.70}$$

Аналогично

$$B = \lim_{m \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} s_{mn} \right). \tag{3.71}$$

Ряд, у которого все $a_{kl} \geqslant 0$, называется *двойным рядом с положительными членами.*

Если двойные ряды $\sum\limits_{k,\, l=0}^{\infty} a_{kl}$ и $\sum\limits_{k,\, l=0}^{\infty} |a_{kl}|$ сходятся одновременно, то двойной ряд называется *абсолютно сходящимся.* Если же ряд $\sum\limits_{k,\, l=0}^{\infty} a_{kl}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k,\, l=0}^{\infty} |a_{kl}|$ расходится, то двойной ряд $\sum\limits_{k,\, l=0}^{\infty} a_{kl}$ называется *неабсолютно* (*условно*) *сходящимся.*

9. Некоторые свойства двойных рядов. I. Если сходится двойной ряд (3.61) и ряды (3.66), (3.67), то сходится также повторный ряд (3.64), который имеет ту же сумму, что и двойной ряд (3.61).

Подобно этому имеет место такое свойство.

II. Если сходится двойной ряд (3.61) и ряды (3.68), (3.69), то сходится и повторный ряд (3.65), который имеет ту же сумму, что и двойной ряд (3.61).

Примечание. Из сходимости двойного ряда (3.61), вообще говоря, не вытекает сходимость рядов (3.66) и (3.68).

III. Для сходимости двойного ряда (3.61) с положительными членами необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы были ограничены.

IV. Если из трех рядов с положительными членами (3.61), (3.64) и (3.65) один сходится, то сходятся и два другие и имеют ту же сумму.

Можно установить взаимно однозначное соответствие между попарно равными членами двойной последовательности $\{a_{kl}\}$ и обычной последовательности $\{b_s\}$. В этом случае говорят для краткости, что двойной ряд $\sum\limits_{k,\,l=0}^{\infty} a_{kl}$ и ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} b_s$ состоят из одних и тех же членов.

V. Если двойной ряд $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ и положительный ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} b_s$ состоят из одних и тех же членов, то из сходимости одного ряда вытекает сходимость другого и они имеют одинаковую сумму.

VI. Если сходится двойной ряд $\sum\limits_{k,\,l=0}^{\infty} |a_{kl}|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{k,\,l=0}^{\infty} a_{kl}$ (но обратное не имеет места).

VII. Если двойной ряд $\sum\limits_{k,\,l=0}^{\infty} a_{kl}$ и ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} b_s$ состоят из одних и тех же членов, то из абсолютной сходимости одного ряда следует также абсолютная сходимость другого ряда. При этом оба ряда имеют одинаковую сумму.

VIII. Члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять в любом порядке, не изменяя его сумму.

Указанные свойства двойных рядов могут быть полезными при доказательстве сходимости и вычислении сумм двойных рядов.

Пример 24. Легко доказать, что двойной ряд

$$\sum_{k,\,l=1}^{\infty} \frac{1}{(k+l)^{\alpha}} \tag{3.72}$$

сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leqslant 2$.

В самом деле, полагая $k+l=m$, получаем, что $m-1$ членов ряда (3.72) равны $\frac{1}{m^\alpha}$. Поэтому ряд (3.72) можно представить через простой ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{m-1}{m^\alpha} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha-1}} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}. \tag{3.73}$$

Оба ряда в правой части (3.73) сходятся при $\alpha > 2$ (пример 15), следовательно, сходится и ряд в левой части (3.73). В силу свойства V двойных рядов сходится и двойной ряд (3.72), и его сумма равна сумме простого ряда (3.73).

10. Некоторые признаки сходимости двойных знакоположительных рядов. Оценки остаточных членов. Для сходимости любого двойного ряда $\sum\limits_{k,\,l=0}^{\infty} a_{kl}$ необходимо, чтобы

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ l\to\infty}} a_{kl} = 0, \tag{3.74}$$

когда k и l стремятся к бесконечности независимо друг от друга.

Для двойных рядов с положительными членами можно дать более жесткие необходимые условия сходимости, чем (3.74).

А именно, для сходимости двойного ряда с положительными членами *необходимо*, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = 0 \tag{3.75}$$

и

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} = 0, \tag{3.76}$$

и, следовательно, тем более должны выполняться условия

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} a_{kl} = 0 \tag{3.77}$$

и

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{k=0}^{l} a_{kl} = 0. \tag{3.78}$$

Из (3.77) и (3.78) следует также необходимость выполнения следующих условий:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}} a_{kl}=0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} a_{kl}=0 \quad \text{при} \quad \text{любом } l, \\ \lim\limits_{l\to\infty} a_{kl}=0 \quad \text{при} \quad \text{любом } k. \end{array}\right\} \tag{3.79}$$

Аналогично тому, как это имело место для простых рядов с положительными членами (см. § 1, пп. 3—5), путем сравнения членов двух рядов можно получить ряд общих признаков сходимости двойных рядов с положительными членами и указать соответствующие им оценки остаточных членов.

Пусть задан двойной ряд

$$\sum_{k,\,l=0}^{\infty} a_{kl} \tag{3.80}$$

с положительными членами и некоторый другой ряд

$$\sum_{k,\,l=0}^{\infty} b_{kl}. \tag{3.81}$$

Факт сходимости или сумма ряда (3.81) предполагаются заранее нам известными. Введем обозначения: $k+l=n$,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{b_{kl}}{a_{kl}}=\underline{A}, \tag{3.82}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{b_{kl}}{a_{kl}}=\overline{A}. \tag{3.83}$$

В том случае, когда $\underline{A}=\overline{A}$, положим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{kl}}{a_{kl}}=A. \tag{3.84}$$

В дальнейшем *остаточным членом двойного ряда* (3.80) будем называть выражение

$$R_{mm}=r_{m0}+r_{0m}+r_{mm}, \tag{3.85}$$

где

$$r_{m0}=\sum_{k=m,\,l=0}^{k=\infty,\,l=m-1} a_{kl}, \quad r_{0m}=\sum_{k=0,\,l=m}^{k=m-1,\,l=\infty} a_{kl}$$

и

$$r_{mm} = \sum_{k, l=m}^{\infty} a_{kl}.$$

Выражение (3.85), соответствующее остаточному члену ряда (3.81), обозначим через B_{mm}.

Пользуясь введенными обозначениями, можно сформулировать следующие общие достаточные признаки сходимости для двойного ряда (3.80):

1°. Если $0 \leqslant B_{mm} < +\infty$ для всех $m > N$ и $\underline{A} > 0$, то ряд сходится.

2°. Если $-\infty < B_{mm} \leqslant 0$ для всех $m > N$ и $\bar{A} < 0$, то ряд сходится.

3°. Если при конечных $\underline{A}$ и $\bar{A}$, имеющих один и тот же знак, $B_{mm} = \pm\infty$, то ряд расходится.

4°. Если $0 < B_{mm} < +\infty$ для всех $m > N$ и выполнены условия $-\infty < \underline{A} < +\infty$ и $\bar{A} = +\infty$, то ряд сходится.

5°. Если $-\infty < B_{mm} < 0$ для $m > N$ и выполнены условия $-\infty < \bar{A} < 0$ и $\underline{A} = -\infty$, то ряд сходится.

В том случае, когда ряд (3.80) сходится, имеют место следующие оценки остаточного члена:

$$\frac{B_{mm}}{\inf\limits_{k+l \geqslant m} \frac{b_{kl}}{a_{kl}}} \gtrless R_{mm} \gtrless \frac{B_{mm}}{\sup\limits_{k+l \geqslant m} \frac{b_{kl}}{a_{kl}}}. \tag{3.86}$$

При $\bar{A} = +\infty$ или $\underline{A} = -\infty$ (или $A = \pm\infty$)

$$R_{mm} \leqslant \frac{|B_{mm}|}{\inf\limits_{k+l \geqslant m} \left|\frac{b_{kl}}{a_{kl}}\right|}. \tag{3.87}$$

Далее, выбирая различными способами b_{kl}, из вышеприведенных общих признаков сходимости можно получить и различные практически удобные достаточные признаки сходимости двойных рядов с положительными членами. Неравенства (3.86) и (3.87) позволяют дать оценки остаточных членов, соответствующие выбранному признаку сходимости.

Мы здесь ограничимся рассмотрением лишь одного конкретного случая, например, полагая

$$b_{kl} = a_{k+1, l+1} - a_{k+1, l} - a_{k, l+1} + a_{kl}. \tag{3.88}$$

Тогда из приведенных выше общих признаков следует, что двойной ряд $\sum_{k,\,l=0}^{\infty} a_{kl}$ сходится, если

1) $$\lim_{p \to \infty} a_{pp} = 0, \tag{3.89}$$

2) $$\underline{A} = \varliminf_{k+l \to \infty} \frac{b_{kl}}{a_{kl}} > 0, \tag{3.90}$$

и расходится, если

$$\overline{A} = \varlimsup_{k+l \to \infty} \frac{b_{kl}}{a_{kl}} < 0. \tag{3.91}$$

Оценка остаточного члена, соответствующая этому признаку, имеет вид

$$\frac{a_{m0} + a_{0m} - a_{mm}}{\sup\limits_{k+l \geqslant m} \dfrac{b_{kl}}{a_{kl}}} \leqslant R_{mm} \leqslant \frac{a_{m0} + a_{0m} - a_{mm}}{\inf\limits_{k+l \geqslant m} \dfrac{b_{kl}}{a_{kl}}}, \tag{3.92}$$

где b_{kl} определяется равенством (3.88).

Выполнение одного условия (3.90) не является достаточным для сходимости двойного ряда $\sum_{k,\,l=0}^{\infty} a_{kl}$.

Пример 25. Ряд

$$S = \sum_{k,\,l=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k \left(\frac{6}{5}\right)^l,$$

очевидно, заведомо расходится; в то же самое время имеют место условия $\underline{A} = 0{,}1 > 0$, однако $\lim\limits_{p \to \infty} a_{pp} = \infty$.

Пример 26. Рассмотрим двойной ряд

$$S = \sum_{k,\,l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!\,(l+1)!}. \tag{3.93}$$

Условие (3.89) здесь выполняется, так как

$$\lim_{p \to \infty} a_{pp} = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{[(p+1)!]^2} = 0.$$

Согласно (3.90) имеем

$$\lim_{k+l\to\infty}\frac{b_{kl}}{a_{kl}}=\lim_{k+l\to\infty}\frac{a_{k+1,\,l+1}-a_{k,\,l+1}-a_{k+1,\,l}+a_{kl}}{a_{kl}}=$$

$$=\lim_{k+l\to\infty}\frac{(k+1)(l+1)}{(k+2)(l+2)}=\begin{cases}\dfrac{l+1}{l+2} & \text{при фиксированном } l;\\ \dfrac{k+1}{k+2} & \text{при фиксированном } k;\\ 1, & \text{если одновременно } k \text{ и } l\to\infty.\end{cases}$$

Но для всех $k,\ l\geqslant 0$, очевидно, имеют место неравенства $\frac{1}{2}\leqslant\frac{l+1}{l+2}\leqslant 1$ и $\frac{1}{2}\leqslant\frac{k+1}{k+2}\leqslant 1$, т. е. $\underline{A}=\frac{1}{2}$. Следовательно, ряд (3.93) сходится.

Для оценки R_{mm}, согласно (3.92), сначала заметим, что для функции $F(x,\ y)=\frac{(x+1)(y+1)}{(x+2)(y+2)}$ необходимые условия экстремума $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$ ни при каких конечных положительных x и y не выполняются, причем наибольшие и наименьшие значения этой функции могут достигаться только на границе области $m\leqslant x,\ y<\infty$.

Пользуясь этим обстоятельством, нетрудно показать, что

$$\inf_{k+l\geqslant m}\frac{b_{kl}}{a_{kl}}=\inf_{k+l\geqslant m}\frac{(k+1)(l+1)}{(k+2)(l+2)}=\frac{m+1}{m+2}\cdot\frac{1}{2}$$

и

$$\sup_{k+l\geqslant m}\frac{(k+1)(l+1)}{(k+2)(l+2)}=1.$$

Подставляя найденные значения в неравенство (3.92), будем иметь

$$\frac{2}{(m+1)!}-\frac{1}{[(m+1)!]^2}\leqslant R_{mm}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4(m+2)}{(m+1)(m+1)!}-\frac{2(m+2)}{(m+1)[(m+1)!]^2}.$$

Например, при $m=4$ получим

$$0{,}0159\leqslant R_{mm}\leqslant 0{,}0382.$$

§ 2. Функциональные ряды

1. Основные свойства и признаки сходимости. В этом параграфе рассматриваются функциональные ряды, т. е. ряды, членами которых являются функции. Для простоты ограничимся рядом

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad (3.94)$$

члены которого суть функции одного переменного. Обобщение на случай двух или нескольких переменных получается непосредственно.

Определение. *Функциональным рядом* называется символ (3.94), составленный из членов последовательности функций $\{u_n(x)\}$, определенных на множестве $X=\{x\}$ числовой прямой E_1, которой отвечает последовательность $\{s_n\}$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

частичных сумм ряда (3.94).

Существуют различные виды предельного перехода для функции $s_n(x)$: *равномерный*, *неравномерный*, *в среднем* и т. д. Им отвечают различные формы сходимости функциональных рядов.

Пусть последовательность $\{s_n(x)\}$ сходится на X *равномерно* (*неравномерно*) к функции $S(x)$. Тогда ряд (3.94) называется *равномерно* (*неравномерно*) *сходящимся*, а $S(x)$ — его *суммой*:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \qquad (3.95)$$

Условие равномерной сходимости ряда. Для того чтобы ряд (3.94) сходился равномерно в X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon>0$ существовал такой не зависящий от x номер N, что при $n>N$ и любом $m=1, 2, 3, \ldots$ неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right|<\varepsilon$$

справедливо *для всех x из X одновременно.*

Если все члены ряда (3.94), равномерно сходящегося на множестве X, умножить на одну и ту же функцию $v(x)$, ограниченную в X,

$$|v(x)| \leqslant M,$$

то равномерная сходимость сохранится.

Признаки равномерной сходимости рядов.

1°. Признак Вейерштрасса. Если члены ряда (3.94) удовлетворяют на множестве X неравенствам

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{3.96}$$

где c_n — члены некоторого сходящегося числового ряда, то ряд (3.94) сходится в X равномерно.

При наличии неравенства (3.96) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

называют *мажорантным рядом* для (3.94). Функциональный ряд, удовлетворяющий признаку Вейерштрасса, является *абсолютно* сходящимся, более того, при этом равномерно сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Возможны случаи, когда ряд (3.94) сходится равномерно, не будучи сходящимся абсолютно.

Для функциональных рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) = a_1(x)\, b_1(x) + \ldots + a_n(x)\, b_n(x) + \ldots \tag{3.97}$$

имеют место следующие признаки.

2°. Признак Абеля. Ряд (3.97) сходится равномерно на множестве X, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = b_1(x) + b_2(x) + \tag{3.98}$$

сходится *равномерно* на множестве X, а функции $a_n(x)$ при любых x образуют монотонную последовательность и при любых x и n ограничены:

$$|a_n(x)| \leqslant K.$$

3°. Признак Дирихле. Ряд (3.97) сходится *равномерно* на множестве X, если частичные суммы $s_n(x)$ ряда (3.98) при любых x и n ограничены:

$$|s_n(x)| \leqslant M,$$

а функции $a_n(x)$ при любом x образуют монотонную последовательность, сходящуюся к нулю *равномерно* на множестве X.

Отметим еще некоторые свойства суммы функционального ряда. Если функции $u_n(x)$ ряда (3.94) определены на интервале $X=(a, b)$ и все непрерывны в точке $x=x_0$ этого интервала, и, кроме того, ряд (3.94) сходится равномерно, то и сумма ряда $S(x)$ в точке $x=x_0$ также непрерывна.

Отсюда вытекает и следующее утверждение: если функции $u_n(x)$ непрерывны во всем интервале $X=(a, b)$ и ряд (3.94) на нем сходится равномерно, то сумма $S(x)$ ряда (3.94) непрерывна на всем интервале. Равномерная сходимость в приведенных формулировках является условием *достаточным*, но не необходимым, так как непрерывной суммой на интервале могут обладать ряды, сходящиеся в нем неравномерно. Мы не будем здесь формулировать необходимые и достаточные условия непрерывности суммы ряда, укажем лишь, что равномерная сходимость является необходимым и достаточным условием, если члены ряда (3.94) на интервале $X=(a, b)$ вдобавок еще положительны.

Почленное интегрирование рядов. Если члены $u_n(x)$ ряда (3.94) непрерывны на интервале $X=(a, b)$ и ряд (3.94) сходится на этом интервале равномерно, то интеграл от суммы $S(x)$ ряда (3.94) равен сумме интегралов от членов ряда

$$\int_a^b S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx. \tag{3.99}$$

Иными словами, при этих условиях допустимо *почленное интегрирование ряда*.

Обобщением предыдущей теоремы является следующая: если члены ряда $u_n(x)$ интегрируемы (в смысле Римана) на интервале $X=(a, b)$, а ряд (3.94) сходится равномерно, то сумма ряда $S(x)$ также будет интегрируема и справедливо соотношение (3.99).

Почленное дифференцирование рядов. Если члены $u_n(x)$ ряда (3.94) определены на интервале $X=(a, b)$ и имеют на нем непрерывные производные $u'_n(x)$ и в X сходится ряд (3.94) и, кроме того, равномерно сходится ряд, составленный из производных:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \quad + u'_n(x) +$$

то и сумма ряда (3.94) $S(x)$ имеет в X производную, причем

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \tag{3.100}$$

иначе говоря, производная от суммы ряда равна сумме ряда, составленного из производных, т. е. допустимо *почленное дифференцирование ряда* (3.94). Отметим, что ограничения этой теоремы могут быть несколько ослаблены (см. [11], т. II, § 407).

2. Степенные ряды. Этот раздел теории функциональных рядов имеет особо важное значение.

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots \tag{3.101}$$

называется *степенным*. Заменой переменной $x_1 = x - x_0$ (индекс «1» мы далее опускаем) он сводится к ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad + a_n x^n + \ldots, \tag{3.102}$$

которым мы далее и будем заниматься.

Возможны 3 случая.

Случай 1. Ряд (3.102) сходится при любом действительном x, т. е. на всей оси E_1. Тогда ряд называют *всюду сходящимся*.

Случай 2. Ряд (3.102) сходится лишь при $x=0$. Тогда ряд называют *всюду расходящимся*.

Случай 3. Ряд сходится на некотором интервале $(-R, +R)$, $0<R<\infty$; число R называют *радиусом сходимости ряда*.

Условимся считать, что случаю 1 соответствует радиус сходимости $R=\infty$, а случаю 2 — радиус сходимости $R=0$.

Пример 27. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+$$

сходится при любом x $(R=\infty)$.

Пример 28. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n = x+2!x^2+3!x^3+$$

сходится лишь при $x=0$ $(R=0)$.

Пример 29. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+$$

сходится на интервале $(-1, +1)$ $(R=1)$.

Пример 30. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+$$

сходится на полуинтервале $[-1, +1)$ $(R=1)$.

Пример 31. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+$$

сходится на отрезке $[-1, +1]$ $(R=1)$.

Если имеется предел (см. признак сходимости Даламбера)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho,$$

то

$$R=\frac{1}{\rho}. \qquad (3.103)$$

$(R=\infty$ при $\rho=0$, $R=0$ при $\rho=\infty)$.

Исходя из признака Коши, получаем

$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{3.104}$$

Если ряд (3.102) имеет радиус сходимости $R > 0$, то каково бы ни было положительное число $r < R$, ряд (3.102) сходится равномерно относительно x на отрезке $[-r, r]$.

Сумма $S(x)$ ряда (3.102) для всех значений x между $-R$ и R является непрерывной функцией от x.

Теорема 7 (о тождестве степенных рядов). *Если два степенных ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

в окрестности точки $x = 0$ имеют одну и ту же сумму $S(x)$, то эти ряды тождественны, т. е. соответствующие коэффициенты их равны: $a_n = b_n$.

Следующие положения касаются поведения степенного ряда на концах интервала сходимости. Если степенной ряд (3.102) на конце интервала сходимости расходится, то сходимость ряда на полуинтервале $[0, R)$ не может быть равномерной.

Обратное утверждение: если степенной ряд (3.102) сходится и при $x = R$ $(x = -R)$ (даже неабсолютно), то ряд сходится равномерно во всем отрезке $[0, R]$ $([-R, 0])$.

Теорема 8 (Абеля). *Если ряд* (3.102) *сходится при $x = R$, то сумма его сохраняет непрерывность* (*слева*) *при этом значении x, т. е.*

$$\lim_{x\to R-0} S(x) = S(R).$$

См. пример 30 при $x = -R = -1$ и пример 31 при $x = -R = -1$, $x = R = 1$.

3. Действия над степенными рядами. Ряд Тейлора. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. а) Степенной ряд (3.102) на отрезке $[0, x]$, где $|x| < R$, можно интегрировать почленно:

$$\int_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}; \tag{3.105}$$

x может достигать того конца отрезка, на котором ряд (3.102) сходится.

б) Степенной ряд (3.102) внутри его отрезка сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1},$$

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)a_n x^{n-m};$$

это справедливо и для того конца отрезка, на котором ряд сходится.

Ряд Тейлора. Различные формы остаточного члена. Функция, представляемая степенным рядом на его интервале сходимости, имеет внутри интервала производные всех порядков. Сам ряд является *рядом Тейлора* этой функции.

Если функция разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, то в этой окрестности

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{3.106}$$

где

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (0!=1). \tag{3.107}$$

Частный случай ряда Тейлора при $x_0=0$ иногда называют *рядом Маклорена*. Как следует из (3.106) и (3.107), он имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{3.108}$$

где

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ограничиваясь конечным числом членов в ряде Тейлора, можно представить функцию $f(x)$ в виде частичной суммы s_n

этого ряда и *остаточного* (или дополнительного) члена r_n:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k+\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (x-x_0)=s_n(x)+r_n(x). \tag{3.109}$$

При $x \to x_0$ остаточный член $r_n(x)$ представляет собой бесконечно малую порядка выше n-го (по сравнению с $x-x_0$). Известны различные формы остаточного члена ряда Тейлора.

Форма Шлемильха и Роша

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}. \tag{3.110}$$

Здесь $p>0$, $0<\theta<1$.

Придавая p конкретные значения, получаем более частные формы остаточного члена, а именно:

Форма Лагранжа ($p=n+1$)

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (0<\theta<1). \tag{3.111}$$

Форма Коши ($p=1$)

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^{n}(x-x_0)^{n+1} \quad (0<\theta<1). \tag{3.112}$$

Эти формы остаточного члена, несмотря на неопределенность величины θ, позволяют оценить точность замены функции $f(x)$ многочленом n-й степени $s_n(x)$. Если $(n+1)$-я производная на интервале между x и x_0 ограничена по абсолютной величине числом M, то из (3.111) имеем

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Пример 32. Разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=0$ функции $f(x)=e^x$ имеет вид:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x),$$

где

$$r_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots$$

По формуле (3.111)

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Тогда (при $x > 0$)

$$|r_n(x)| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Так, например, при $x = 1$

$$|r_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Остаточный член может быть выражен и в *интегральной форме*, которая не содержит никаких неопределенных чисел:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt. \tag{3.113}$$

Для рассмотренного выше примера можно записать:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_0^x e^t (x-t)^n\, dt.$$

Отметим, что ряд Тейлора может быть сходящимся, не представляя порождающую его функцию $f(x)$.

Пример 33 (Коши). Пусть имеется функция $\varphi(x)$, которая в окрестности $x = 0$ представлена в виде ряда

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} x + \frac{\varphi''(0)}{2!} x^2 + \tag{3.114}$$

Добавим к ней функцию $\psi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Если доопределить $\psi(x)$, положив $\psi(0) = 0$, то как $\psi(0)$, так и все производные $\psi^{(n)}(0)$ равны нулю, поэтому разложение функции $\psi(x)$ в ряд Тейлора в окрестности $x = 0$ тождественно равно нулю. Но тогда

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} x + \frac{\varphi''(0)}{2!} x^2 + \ldots \tag{3.115}$$

Отсюда ясно, что из совпадения разложений функций (3.114) и (3.115) нельзя сделать вывода о равенстве левых частей: $f(x) \neq \varphi(x)$.

Вообще, если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны при $x = x_0$ и равны все их производные, в то время как функции не равны тождественно, разложения их в ряд Тейлора в окрестности $x = x_0$ совпадают.

Различные действия над степенными рядами. Подстановка ряда в ряд. Пусть дан ряд

$$z = f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n, \quad (3.116)$$

сходящийся в интервале $(-R, R)$. Переменная y, в свою очередь, выражается степенным рядом как функция x:

$$y = \varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad (3.117)$$

сходящимся в интервале $(-r, r)$. Требуется представить z степенным рядом в зависимости от x и определить интервал сходимости полученного ряда. Формально подставляя ряд (3.117) в ряд (3.116), имеем

$$z = f[\varphi(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad (3.118)$$

где

$$A_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \ldots$$
$$A_1 = a_1 b_1 + 2 a_2 b_0 b_1 + 3 a_3 b_0^2 b_1 + \ldots,$$
$$A_2 = a_1 b_2 + a_2 (b_1^2 + 2 b_0 b_2) + 3 a_3 (b_0 b_1^2 + b_0^2 b_2) + \ldots,$$

На вопрос о сходимости ряда (3.118) отвечает

Теорема 9. 1°. *Если*

$$|b_0| > R,$$

то ряд (3.118) *расходится, если же*

$$|b_0| < R,$$

то ряд сходится в интервале $(-R_1, R_1)$, *где*

$$R_1 = \frac{(R - |b_0|)\rho}{M + R - |b_0|}. \quad (3.119)$$

причем ρ — *произвольное положительное число, которое удовлетворяет условию* $\rho < r$ *и может быть взято сколь угодно близко к* r, *а* M — *верхняя граница чисел* $|b_m|\rho^m$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$, *так что* $|b_m|\rho^m \leqslant M$ *для всех* m.

2°. *Если* $b_0=0$, *то ряд* (3.118) *будет сходиться в интервале* $(-R_1, R_1)$, *причем*

$$R_1=\frac{R\rho}{M+R}.$$

3°. *Если ряд* $z=\sum a_n y^n$ *сходится для всех* y, *т. е. в интервале* $(-\infty, +\infty)$, *то ряд* (3.118) *будет сходиться для* $|x|<r$, *т. е. в интервале* $(-r, r)$.

Умножение и деление степенных рядов. Теорема 10. *Произведение рядов*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \quad \varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

сходящихся соответственно в интервалах

$$I_1=(-R_1, R_1) \quad \text{и} \quad I_2=(-R_2, R_2),$$

определяется равенством

$$F(x)=f(x)\varphi(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ \ldots\ =\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

где $c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0$, $c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$ *и т. д., и сходится в меньшем из интервалов* I_1, I_2.

Частное от деления 1 на степенной ряд $1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$:

$$f(x)=\frac{1}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n},$$

сходящийся в интервале $(-r, r)$, определяется рядом

$$f(x)=1+A_1x+A_2x^2+\ \ldots\ =1+\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n, \qquad (3.120)$$

где $A_1=-b_1$, $A_2=b_1^2-b_2$, $A_3=-b_1^3+2b_1b_2-b_3$ и т. д.

Теорема 11. *Ряд* (3.120) *сходится в интервале* $\left(-\frac{\rho}{M+1}, \frac{\rho}{M+1}\right)$, *где* $0<\rho<r$ *и* ρ *можно взять*

сколь угодно близким к r, а M представляет верхнюю границу чисел $|b_m|\rho^m$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$.

Отсюда легко перейти к делению двух степенных рядов

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}.$$

Имеем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{b_0}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)(1+A_1x+A_2x^2+\ldots),$$

где

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n=\frac{1}{1+\frac{1}{b_0}\sum\limits_{1}^{\infty}b_nx^n}$$

находится, как указано выше. Тогда разложение

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

будет сходиться в интервале, определяемом из вышеприведенных теорем.

4. Комплексные ряды. *Числовым* (или *функциональным*) *комплексным рядом*

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n \tag{3.121}$$

называется ряд, члены которого являются комплексными числами (или функциями):

$$c_n=a_n+ib_n. \tag{3.122}$$

Сходимость комплексного ряда (3.121) к сумме $S=A+iB$ равносильна сходимости двух действительных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{3.123}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n, \tag{3.124}$$

соответственно, к суммам A и B.

Имеет место

Теорема 12. *Если сходится положительный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \tag{3.125}$$

составленный из модулей членов ряда (3.121), *то и ряд* (3.121) *также сходится.*

В этом случае ряд (3.121) называется *абсолютно сходящимся.* Для комплексных рядов сохраняют свою силу признаки Даламбера и Коши. На абсолютно сходящиеся комплексные ряды переносится теорема о перестановки членов ряда и правило о почленном умножении рядов. Все теоремы об абсолютно сходящихся действительных рядах сохраняют силу для абсолютно сходящихся комплексных рядов.

Функции комплексного переменного. Если каждому значению комплексного переменного z из области Z в комплексной плоскости соответствует одно значение другого комплексного переменного $w = u + iv$, то w называют комплексной функцией от z в области Z и записывают

$$w = f(z). \tag{3.126}$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима в виде ряда Тейлора, т. е. разлагается в сходящийся степенной ряд по степеням $(z - z_0)$, то ее называют *аналитической функцией от z в точке z_0.* Если $f(z)$ представима в виде степенного ряда в окрестности любой точки области Z (открытой или замкнутой), то ее называют *аналитической функцией от z в области Z.* Функции, обладающие таким свойством, представляют наибольший интерес для приложений.

Комплексный степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3.127}$$

обладает рядом свойств, подобных свойствам действительного степенного ряда. Без утраты общности будем далее рассматривать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{3.128}$$

Так как вместо *интервала сходимости* для него появляется *круг сходимости*, то термин *радиус сходимости* здесь приобретает точный смысл.

Если коэффициенты c_n степенного ряда (3.127) — действительные числа, то радиус R *круга сходимости* совпадает с прежним радиусом сходимости.

Имеет место следующее предложение: если ряд (3.128) сходится в некоторой точке z_0 окружности $|z| = R$, то при приближении точки z к точке z_0 изнутри по радиусу имеем

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n.$$

Внутри круга сходимости комплексный степенной ряд можно дифференцировать почленно.

Если разлагать функцию в ряд по степеням z, то расстояние от начала ($z = 0$) до ближайшей *особой* *) точки функции равно радиусу сходимости суммы ряда.

Пример 34.

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}. \qquad (3.129)$$

Если взять действительную ось $z = x$, то разложение

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \qquad (3.130)$$

имеет радиус сходимости $R = 1$, хотя при переходе через точки ± 1 функция $\frac{1}{1+x^2}$ и ее производные никакого разрыва не претерпевают. Обращаясь к разложению (3.129) в комплексной плоскости, видим, что в точках $\pm i$ функция $\frac{1}{1+z^2}$ терпит разрыв. Это и является причиной расходимости разложения (3.130) при $|x| > 1$.

Если ввести обозначения $c_n = a_n + ib_n$ (a_n, b_n — действительные числа), $|z| = r$, $\arg z = \theta$, то ряд (3.128) может

---

*) *Особой* называется точка, в окрестности которой функция не представима степенным рядом.

быть записан в форме:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) r^n e^{in\theta} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n + ib_n)(\cos n\theta + i \sin n\theta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta) + i \sum_{n=0}^{\infty} r^n (b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta).$$

Далее, обозначая $a_n r^n = A_n$, $-b_n r^n = B_n$, имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) +$$

$$+ i \sum_{n=0}^{\infty} (-B_n \cos n\theta + A_n \sin n\theta).$$

Таким образом, действительная и мнимая части ряда записываются в виде тригонометрических рядов.

Пример 35.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (r = |z| < 1);$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(r\cos\theta + ir\sin\theta)} = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} +$$

$$+ i \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\theta + i \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\theta,$$

откуда

$$\frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\theta,$$

$$\frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\theta.$$

5. Тригонометрические ряды Фурье. Функция $f(x)$, имеющая *период* 2π *) ($f(x) = f(x + 2\pi n)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$),

---

*) Если период функции $f(x)$ равен $2L$, то перейти к периоду 2π можно, если ввести переменную $y = \frac{\pi}{L} x$, поэтому все дальнейшие рассуждения сохраняют общность.

при определенных приводимых далее ограничениях может быть представлена в форме бесконечного *тригонометрического ряда Фурье*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (3.131)$$

Для определения коэффициентов ряда (3.131) служат формулы Эйлера — Фурье

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (3.132)$$

Для того чтобы ряд Фурье (3.131) сходился к заданной функции $f(x)$, т. е. чтобы сумма его в каждой точке x_0 интервала $(0, 2\pi)$ равнялась значению $f(x_0)$ в этой точке, функция $f(x)$ должна удовлетворять некоторым условиям (см. ниже, а также гл. IV, § 2, п. 5).

Теорема 13 (локализации). *Поведение (т. е. сходимость или расходимость) ряда Фурье функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 зависит исключительно от значений, принимаемых функцией в непосредственной близости от точки x_0.*

Сумма S_0 ряда (3.131) для функции $f(x)$ в точке x_0 определяется следующим образом:

а) когда функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна, то

$$S_0 = f(x_0),$$

б) когда функция $f(x)$ в точке x_0 имеет разрыв первого рода (а следовательно, пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$ существуют), то

$$S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Функцию $f(x)$ называют *гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она на этом отрезке обладает *непрерывной* производной.

Непрерывную функцию $f(x)$ называют *кусочно-гладкой* на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить на *конечное* число частичных отрезков, на каждом из которых $f(x)$ является гладкой функцией.

Разрывную функцию $f(x)$ называют *кусочно-гладкой* на отрезке $[a, b]$, если: 1) на этом отрезке она имеет лишь точки разрыва первого рода и притом в *конечном* числе, 2) на каждом из частичных отрезков $[\alpha, \beta]$, на которые точки разрыва разбивают отрезок $[a, b]$, *непрерывная* функция

$$g(x) = \begin{cases} f(\alpha + 0) & \text{для} \quad x = \alpha, \\ f(x) & \text{для} \quad \alpha < x < \beta, \\ f(\beta - 0) & \text{для} \quad x = \beta \end{cases}$$

оказывается кусочно-гладкой.

Признак сходимости ряда Фурье. Ряд Фурье кусочно-гладкой (непрерывной или разрывной) функции $f(x)$ периода 2π сходится для всех значений x_0, причем его сумма равна S_0.

Если кусочно-гладкая функция $f(x)$ всюду непрерывна, то ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.

Теорема 14. *Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция периода 2π, непрерывная и обладающая абсолютно интегрируемой производной на некотором отрезке $[a, b]$ (производная может и не существовать в отдельных точках). Тогда ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно на всяком отрезке $[a + \delta, b - \delta]$* $(\delta > 0)$.

Эта теорема справедлива, в частности, для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ периода 2π, непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке $[a, b]$.

Пример 36. Функция $f(x) = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$, обращающаяся в бесконечность для $x = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, имеет период 2π. Ее ряд Фурье

$$-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots$$

Признак Дирихле — Жордана. Ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к сумме S_0, если на некотором отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ функция имеет ограниченное изменение.

Более частная формулировка:

Признак Дирихле. Если функция $f(x)$ периода 2π кусочно-монотонна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет в нем конечное число точек разрыва, то ее ряд Фурье сходится к сумме $f(x_0)$ в каждой точке непрерывности и к сумме $S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ в каждой точке разрыва (см. гл. IV, § 2, п. 5).

Признак Дини сходимости рядов Фурье. Ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к сумме S_0, если при некотором $h > 0$ интеграл

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt$$

существует, где

$$\varphi(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0.$$

Частным признаком сформулированного признака Дини является

Признак Липшица. Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0, где она непрерывна, к сумме $S_0 = f(x_0)$, если для достаточно малых $t > 0$ выполняется неравенство

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leqslant Lt^{\alpha},$$

где L и α — положительные постоянные ($\alpha \leqslant 1$).

В частности, под этот признак подходят кусочно-дифференцируемые функции.

Признаки Дини и Дирихле — Жордана не вытекают один из другого.

В случае функции $f(x)$, заданной либо только на полуинтервале $(-\pi, \pi]$, либо определенной и вне его, но непериодичной, для применения изложенной выше теории вместо функции $f(x)$ вводится вспомогательная функция $f^*(x)$, обладающая следующими свойствами:

$$f^*(x) = f(x), \qquad (-\pi < x \leqslant \pi),$$
$$f^*(-\pi) = f^*(\pi),$$

а на остальные действительные значения x функция $f^*(x)$ распространяется по закону периодичности.

К функции $f^*(x)$ применимы все приведенные выше теоремы и предложения. Внутри интервала ряд представляет функцию $f(x)$.

Этого построения не требуется, если $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда на всем открытом интервале (включая концы его) ряд Фурье сходится к функции $f(x)$. Но вне этого интервала сумма ряда вообще уже не совпадает с функцией $f(x)$, если последняя задана на всей действительной оси.

С учетом сноски в начале настоящего пункта можно утверждать, что произвольно заданная в произвольном промежутке функция в весьма широком классе случаев (включая кусочно-дифференцируемые или кусочно-монотонные функции) оказывается разложимой в тригонометрический ряд (дополнительно см. гл. IV, § 2, п. 5).

Разложения только по синусам или только по косинусам. Ряд Фурье четной функции ($f(x) = f(-x)$) содержит только косинусы:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Ряд Фурье нечетной функции $f(x)$ ($= -f(-x)$) содержит только синусы

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Каждая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$, может быть представлена в виде суммы *четной* $f_1(x)$ и *нечетной* $f_2(x)$ составляющих функций:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Если функция задана лишь на отрезке $[0, \pi]$, то определяя ее по произволу на интервале $[-\pi, 0]$, можно получить различные ряды Фурье, которые в точке x_0 между 0 и π будут иметь сумму S_0, сходящуюся либо к $f(x_0)$, либо к $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ (в случае разрыва).

Достраивая функцию в $(-\pi, 0)$ как четную, т. е. полагая $f(-x) = f(x)$, получим разложение лишь по косинусам, достраивая ее как нечетную $(f(-x) = -f(x))$, получим разложение лишь по синусам.

Пример 37. $f(x) = x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

1. Пусть $f(x) = f(-x) = -x \quad (-\pi \leqslant x < 0)$; тогда

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right).$$

2. Пусть $f(x) = -f(-x) = x \quad (-\pi < x < 0)$; тогда

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

Порядок коэффициентов Фурье. Если периодическая функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода (на периоде), то ее коэффициенты Фурье при $n \to \infty$ будут бесконечно малыми вида $O\left(\frac{1}{n}\right)$ (см. гл. 1, § 3, пп. 8 и 15).

Это означает, что

$$n\,|a_n| < M, \quad n\,|b_n| < M,$$

где M — некоторое постоянное положительное число, каково бы ни было n.

Если периодическая функция $f(x)$ всюду непрерывна, то ее коэффициенты Фурье при $n \to \infty$ будут бесконечно малыми порядка выше, чем $\frac{1}{n}$, т. е. вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$ (см. гл. 1, § 3, пп. 8 и 15).

Это означает, что

$$\lim_{n \to \infty} na_n = \lim_{n \to \infty} nb_n = 0.$$

Если периодическая непрерывная функция имеет всюду непрерывные производные до $(m-1)$-го порядка включительно, то ее коэффициенты Фурье a_n и b_n будут при $n \to \infty$ порядка выше, чем $\frac{1}{n^m}$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} n^m a_n = \lim_{n \to \infty} n^m b_n = 0.$$

В частности, если периодическая функция $f(x)$ имеет всюду непрерывные производные любого порядка, то ее коэффициенты Фурье a_n и b_n удовлетворяют условию

$$n^m a_n \to 0, \quad n^m b_n \to 0$$

при $n \to \infty$, каково бы ни было m.

Интегрирование рядов Фурье. Рассмотрим сначала непрерывную функцию $f(x)$, заданную всюду на E_1.

Теорема 15. *Если абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ задана своим рядом Фурье*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{3.133}$$

то $\int_a^b f(x)\,dx$ может быть найден почленным интегрированием ряда (3.133) *независимо от того, сходится последний или нет, т. е.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \\ = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\sin nb - \sin na) - b_n(\cos nb - \cos na)}{n}. \tag{3.134}$$

Теорема 16. *Пусть абсолютно интегрируемая функция задана своим рядом Фурье* (*сходящимся или нет*) (3.133). *Тогда для ее интеграла имеет место следующее разложение в ряд Фурье*:

$$\int_0^x f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + (a_n + (-1)^{n+1} a_0) \sin nx}{n} \tag{3.135}$$

$$(-\pi < x < \pi).$$

Частный случай этой теоремы: $a_0=0$ (прочие условия теоремы сохраняются); тогда для всех x

$$\int_0^x f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos nx+a_n\sin nx}{n}. \qquad (3.136)$$

Дифференцирование рядов Фурье. Теорема 17. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода 2π, обладающая абсолютно интегрируемой производной (которая может и не существовать в конечном числе точек). Тогда ряд Фурье для $f'(x)$ может быть получен из ряда Фурье* (3.133) *функции $f(x)$ почленным дифференцированием*:

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}n\,(b_n\cos nx-a_n\sin nx). \qquad (3.137)$$

Теорема 18. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода 2π, обладающая m производными, причем первые $m-1$ производные непрерывны, а m-я производная абсолютно интегрируема (m-я производная может и не существовать в конечном числе точек). Тогда*: 1) *ряды Фурье для всех m производных могут быть получены почленным дифференцированием ряда Фурье для $f(x)$, причем все эти ряды, кроме, может быть, последнего, сходятся к соответствующим производным*; 2) *для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ имеют место соотношения* (см. выше):

$$\lim_{n\to\infty}n^m a_n=\lim_{n\to\infty}n^m b_n=0. \qquad (3.138)$$

При этом ряд для $f(x)$ и все ряды, полученные из него почленным дифференцированием, за исключением, может быть, последнего, сходятся равномерно.

В известном смысле обратной для этой теоремы является

Теорема 19. *Пусть дан тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (3.139)$$

Если для коэффициентов a_n и b_n справедливы соотношения

$$|n^m a_n|\leqslant M,\quad |n^m b_n|\leqslant M \qquad (m\geqslant 2,\ M=\mathrm{const}),$$

то сумма ряда (3.139) *есть непрерывная функция периода* 2π, *обладающая* $m-2$ *непрерывными производными, которые могут быть получены почленным дифференцированием.*

Теорема 20. *Пусть непрерывная функция* $f(x)$ *задана на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *и обладает абсолютно интегрируемой производной (которая может не существовать в конечном числе точек). Тогда*

$$f'(x) \sim \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nb_n + (-1)^n c) \cos nx - na_n \sin nx], \quad (3.140)$$

где a_n *и* b_n — *коэффициенты Фурье функции* $f(x)$, *а постоянная* c *определяется равенством*

$$c = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)]. \quad (3.141)$$

Теорема 21. *Пусть дан ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (3.142)$$

Если ряд

$$\frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nb_n + (-1)^n c) \cos nx - na_n \sin nx], \quad (3.143)$$

где

$$c = \lim_{n \to \infty} \left[(-1)^{n+1} nb_n\right], \quad (3.144)$$

является рядом Фурье от некоторой абсолютно интегрируемой функции $\varphi(x)$ *), *то ряд* (3.142) *является рядом Фурье от функции* $f(x) = \int\limits_0^x \varphi(x)\,dx + \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *непрерывной для* $-\pi < x < \pi$, *сходится к этой функции, причем, очевидно,* $f'(x) = \varphi(x)$ *во всех точках непрерывности* $\varphi(x)$.

*) Сходимость ряда (3.143) не предполагается.

Теорема 22. *Пусть дан ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (3.145)$$

где a_n и b_n положительны. Если величины na_n, nb_n не возрастают (начиная с некоторого n) и стремятся к нулю при $n\to\infty$, то ряд сходится для $-\pi<x<\pi$ и имеет дифференцируемую сумму $f(x)$, причем

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(b_n\cos nx-a_n\sin nx),$$

т. е. ряд (3.145) *можно дифференцировать почленно.*

Можно сформулировать подобные теоремы для функций, заданных на отрезке $[0, \pi]$ (см., например, [10]).

Дополнительные сведения о тригонометрических рядах см. в главе IV.

6. Асимптотические ряды. Если некоторую функцию $F(x)$, определенную при $x\geqslant x_0$, рассматривают при больших значениях аргумента x, то может оказаться полезным определить такую функцию $S(x)$, простую по структуре, чтобы имело место соотношение

$$R(x)=F(x)-S(x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Тогда при больших значениях x можно заменить $F(x)$ через $S(x)$. Если $F(x)$ допускает разложение (при $x>x_0$)

$$F(x)=A_0+\frac{A_1}{x}+\ldots+\frac{A_n}{x^n}+\frac{A_{n+1}}{x^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{x^n}, \qquad (3.146)$$

то, положив

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{x^k}=A_0+\frac{A_1}{x}+\ldots+\frac{A_n}{x^n} \qquad (3.147)$$

и

$$R_n(x)=F(x)-s_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A_k}{x^k}=\frac{A_{n+1}}{x^{n+1}}+\ldots, \qquad (3.148)$$

имеем

$$\lim_{x\to\infty} x^n R_n(x) = 0, \quad \text{или} \quad R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \tag{3.149}$$

т. е. $R_n(x)$ — бесконечно малая порядка выше n-го.

Если $F(x)$ не допускает разложения (3.146), то все же иногда удается подобрать такой ряд вида (3.146), что при любом фиксированном n выполняется условие (3.149).

Ряд (3.147) называют *асимптотическим* для функции $F(x)$ и пишут

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{x^k}. \tag{3.150}$$

Ряд (3.147) может быть расходящимся, однако ценность его сохраняется, так как он дает приближенные формулы

$$F(x) \approx A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots + \frac{A_n}{x^n},$$

причем степень приближения указана соотношением (3.149).

Пример 38. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_x^{\infty} e^{x-t} \frac{dt}{t}.$$

Повторное интегрирование по частям дает:

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = (-1)^n n! \int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt,$$

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt = -\frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\Bigg|_{t=x}^{t=\infty} - (n+1)\int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\, dt < \frac{1}{x^{n+1}},$$

следовательно,

$$|R_n(x)| < \frac{n!}{x^{n+1}}$$

и условие (3.149) выполняется. Итак,

$$F(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + \ldots$$

Этот ряд — расходящийся, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n} = \infty.$$

Если функция $F(x)$ допускает *асимптотическое* разложение, то оно является единственным.

Асимптотическое разложение произведения двух функций $F(x)$ и $G(x)$, каждая из которых имеет асимптотическое разложение

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-k}, \quad G(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{-k}, \tag{3.151}$$

равно формально полученному произведению асимптотических разложений (3.151):

$$F(x)\,G(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-k} \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{-k}, \tag{3.152}$$

где

$$C_m = \sum_{k=0}^{m} A_k B_{m-k}. \tag{3.153}$$

Если асимптотическое разложение функции $F(x)$ (3.150) начинается с члена $A_2 x^{-2}$, то в промежутке от x до $+\infty$ его можно *формально интегрировать почленно, т. е.*

$$\int_x^{\infty} F(x)\,dx \sim \sum_{k=2}^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{A_k}{x^k}\,dx = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{(k-1)\,x^{k-1}}.$$

Формальное дифференцирование асимптотического разложения недопустимо.

Если функция $F(x)$ имеет асимптотическое разложение без свободного члена ($A_0 = 0$ и $F(x) \to 0$ при $x \to \infty$), то это разложение можно *потенцировать*:

$$e^{F(x)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}[F(x)]^m \sim 1 + \\ + \frac{A_1}{x} + \ldots + \left[\frac{A_1^n}{n!} + \ldots + \frac{A_n}{1!}\right]\frac{1}{x^n} + \ldots \tag{3.154}$$

Итак, асимптотическое разложение является источником приближенных формул для вычисления функции при больших значениях аргумента, причем точность формулы (3.147) тем выше, чем больше значения аргумента.

Существуют функции, не тождественно равные нулю, для которых все коэффициенты A_k в асимптотическом представлении (3.150) равны нулю. Такие функции называются *асимптотическими нулями*. Асимптотическим нулем является любая функция $F(x)$, для которой выполняется оценка:

$$F(x)=O\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

при любом n. Например, $F(x)=e^{-x}$ — асимптотический нуль. Добавление такой функции к левой части представления (3.150) не меняет его правой части.

Не всякая функция $F(x)$, определенная на полуинтервале $[a, +\infty)$, допускает асимптотическое разложение (3.150), но если такое разложение существует, то для данной $F(x)$ оно единственно (коэффициенты определяются однозначно). С другой стороны, для любой последовательности чисел $\{A_k\}$ существует функция $F(x)$, для которой A_k суть коэффициенты асимптотического разложения (3.150). Однако эта функция $F(x)$ определяется неоднозначно (с точностью до асимптотического нуля).

7. Некоторые способы обобщенного суммирования расходящихся рядов. Некоторые классы *расходящихся рядов*, т. е. не имеющих суммы в обычном ее понимании, целесообразно суммировать *обобщенно*.

Определение *обобщенной суммы* обычно удовлетворяет двум условиям:

1°. Условие линейности. Если ряду $\sum a_n$ соответствует обобщенная сумма A, ряду $\sum b_n$ — обобщенная сумма B, то ряд $\sum (pa_n+qb_n)$, где p и q — произвольные постоянные, должен иметь обобщенную сумму, равную $pA+qB$.

2°. Условие перманентности. Если ряд сходится в обычном смысле к сумме A, то он должен иметь и обобщенную сумму, равную A.

Общая схема построения линейных перманентных методов суммирования состоит в следующем.

В некоторой области X изменения параметра x задается последовательность функций:

$$\gamma_0(x),\ \gamma_1(x),\ \ldots,\ \gamma_n(x),\ \ldots \tag{3.155}$$

Пусть область X имеет *точку сгущения* — конечное или несобственное число ω.

По данному числовому ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{3.156}$$

строится функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n(x). \tag{3.157}$$

Если этот ряд, по крайней мере для x, достаточно близких к ω, сходится и его сумма $S(x)$ при $x \to \omega$ стремится к пределу A, то это число A и принимается за *обобщенную сумму* ряда (3.156). Для выполнения перманентности метода на функции $\gamma_n(x)$ налагаются два требования:

1) $$\lim_{x \to \omega} \gamma_n(x) = 1 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots); \tag{3.158}$$

2) при всех $x \in X$

$$|\gamma_0(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n(x) - \gamma_{n-1}(x)| \leqslant K < \infty \tag{3.159}$$
$$(K = \mathrm{const}).$$

Рассмотрим ниже два метода обобщенного суммирования, охватываемые приведенной общей схемой.

1°. Метод степенных рядов (Пуассона). По данному числовому ряду (3.156) строится степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots; \tag{3.160}$$

если этот ряд в интервале $0 < x < 1$ сходится и его сумма $S(x)$ при $x \to 1$ имеет предел A:

$$\lim_{x \to 1-0} S(x) = A,$$

то число A называется *обобщенной* (*в смысле Пуассона*) *суммой* данного ряда (3.156).

Этот метод вытекает из общей схемы, если положить

$$X=(0,\ 1),\quad \omega=1,\quad \gamma_n(x)=x^n\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Пример 39. Возьмем ряд, рассмотренный Эйлером:

$$1-1+1-1+1-1+\ldots \tag{3.161}$$

Он не имеет суммы в обычном смысле, так как s_n колеблется между 0 и $+1$. Соответствующий степенной ряд (3.160) имеет вид

$$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Его сумма при $0<x<1$ равна (как сумма бесконечной геометрической прогрессии)

$$S(x)=\frac{1}{1+x}; \tag{3.162}$$

обобщенная сумма ряда (3.161) в смысле Пуассона:

$$A=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}. \tag{3.163}$$

Пример 40. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta\qquad (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi) \tag{3.164}$$

сходится лишь при $\theta=0$ и $\theta=\pm\pi$. Соответствующий степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\theta \tag{3.165}$$

при $0<x<1$ имеет сумму

$$S(x)=\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

Отсюда обобщенная сумма равна

$$A=\lim_{x\to 1-0}\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{3.166}$$

2°. Метод средних арифметических (Чезаро). По частным суммам s_n данного числового ряда (3.156):

$$\left.\begin{aligned} &s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \\ &s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \end{aligned}\right\} \tag{3.167}$$

строятся их последовательные средние арифметические

$$A_1 = s_0, \quad A_2 = \frac{s_0 + s_1}{2}, \; \ldots, \; A_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}. \tag{3.168}$$

Если последовательность $\{A_n\}$ при $n \to \infty$ имеет предел A, то это число называется *обобщенной* (*в смысле Чезаро*) *суммой* ряда (3.156).

Из общей схемы этот метод вытекает, если положить

$$X = n, \; \omega = +\infty, \; \gamma_m(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{m}{n} & \text{при } m = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \text{при } m \geqslant n. \end{cases}$$

Пример 41. Снова обратимся к ряду (3.164). При $\theta \neq 0$

$$s_n = \frac{\cos \frac{1}{2}\theta - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta},$$

$$nA_n = \frac{n}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(n+1)\theta - \sin\theta}{4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta},$$

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Таким образом, обобщенная сумма в смысле Чезаро получилась равной обобщенной сумме в смысле Пуассона.

Для выяснения взаимоотношения между методами Пуассона и Чезаро приведем следующую теорему:

Теорема 23 (Фробениуса). *Если ряд суммируем по методу средних арифметических к конечной «сумме» A, то одновременно он суммируем также и по методу степенных рядов и притом к той же сумме.*

Отметим, что метод Пуассона приложим к более широкому классу рядов, чем метод Чезаро, но не противоречит ему, когда они приложимы оба.

§ 3. Методы вычисления рядов

В этом параграфе рассматриваются некоторые способы конечного суммирования рядов, некоторые оценки рядов, конечных сумм и произведений, а также важный для практических вычислений вопрос улучшения сходимости рядов, т. е. приемы, позволяющие данный ряд заменить другим, имеющим ту же сумму, но сходящимся к ней быстрее.

1. Элементарные приемы точного суммирования. Весьма редко удается точно просуммировать бесконечный ряд, полученный в результате решения какой-либо задачи. Приведем некоторые простые приемы точного конечного суммирования.

Теорема 24. *Если члены a_n ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ можно представить в виде $a_n = b_n - b_{n+1}$ и если числа b_n образуют последовательность $\{b_n\}$, имеющую предел a, то сумма ряда*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 - a. \tag{3.169}$$

Пример 42. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})};$$

тогда

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

причем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, следовательно, $S = 1$ $(b_0 = b_1 = 1)$.

Теорема 25. *Если члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ представимы в виде*

$$a_n = \alpha_1 b_{n+1} + \alpha_2 b_{n+2} + \ldots + \alpha_p b_{n+p}, \tag{3.170}$$

где p — некоторое фиксированное целое положительное число $\geqslant 2$, b_n образуют последовательность, имеющую предел a, и α_i представляют некоторые числа, удовлетворяющие условию

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=0, \tag{3.171}$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится, причем его сумма равна*

$$S=\alpha_1 b_1+(\alpha_1+\alpha_2) b_2+\ldots+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1}) b_{p-1}+ \\ +(\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+(p-1)\alpha_p) a. \tag{3.172}$$

Пример 43. Для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+6}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

имеем

$$\frac{4n+6}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}-\frac{3}{n+3}.$$

Следовательно, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=-3$.

Условие (3.171) выполняется: $1+2-3=0$. Кроме того, $b_n=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда по формуле (3.172) находим

$$S=1\cdot 1+(1+2)\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Теорема 26. *Если члены ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *представимы в виде*

$$a_n=b_n-b_{n+q},$$

где q — целое положительное число, а последовательность чисел b_0, b_1, b_2, имеет пределом ξ, то сумма ряда

$$S=\sum_{n=0}^{\infty} a_n=b_0+b_1+\ldots+b_{q-1}-q\xi.$$

Для конечного суммирования рядов используются таблицы разложений функций в ряды и соответствующие разделы справочных изданий. Имея какой-либо ряд, следует убедиться, нет ли его в справочнике, либо нельзя ли его привести к известному ряду путем замены переменных, либо иных преобразований.

Пример 44. Имеется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp^k \sin kx, \quad |p| < 1.$$

В справочнике [7] приведена формула 1.447 3, которую представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^k \cos kx = \frac{1}{2}\frac{1-p^2}{1-2p\cos x+p^2} - \frac{1}{2} \qquad (|p| < 1).$$

Равномерная сходимость этого ряда и ряда из производных его членов по x следует из сравнения их соответственно с мажорантными рядами $\sum_{k=1}^{\infty} |p|^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} k|p|^k$. Дифференцируя обе части равенства по x, находим сумму ряда (см. § 2, п. 1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp^k \sin kx = \frac{p(1-p^2)\sin x}{(1-2p\cos x+p^2)^2} \qquad (|p|<1).$$

2. Суммирование рядов с помощью функций комплексного переменного. Если тригонометрические ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = f_1(x), \tag{3.173}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = f_2(x) \tag{3.174}$$

имеют положительные коэффициенты a_n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ сходится, то ряды (3.173) и (3.174) являются рядами Фурье для непрерывных функций.

Для нахождения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — сумм заданных рядов (3.173) и (3.174) — можно иногда использовать функции комплексного переменного.

Пусть

$$\varphi(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

— сумма сходящегося в круге $|z|<1$ ряда. Если $\lim\limits_{|z|\to 1}\varphi(z)=\lim\limits_{r\to 1}\varphi(re^{ix})=\varphi(e^{ix})$, то $f_1(x)+if_2(x)=\varphi(e^{ix})$, т. е. имеем после выделения действительной и мнимой частей функции $\varphi(e^{ix})$:

$$f_1(x)=\operatorname{Re}\{\varphi(e^{ix})\}, \tag{3.175}$$

$$f_2(x)=\operatorname{Im}\{\varphi(e^{ix})\}. \tag{3.176}$$

Пример 45. Установить сходимость и просуммировать ряды

$$1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos 2x}{2!}+ \quad =1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}, \tag{3.177}$$

$$\frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin 2x}{2!}+ \quad =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}. \tag{3.178}$$

Сходимость рядов (3.177) и (3.178) немедленно следует из сравнения с рядом

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e,$$

являющимся мажорантным для данных рядов. Далее положим

$$\varphi(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z.$$

Представляя z в показательной форме $z=re^{ix}$ и устремляя r к 1, имеем

$$e^{e^{ix}}=e^{\cos x+i\sin x}=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)]=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos x+i\sin x)^n}{n!},$$

$$e^{\cos x}\cos(\sin x)+ie^{\cos x}\sin(\sin x)=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}.$$

Отсюда

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cos(\sin x),\qquad(3.179)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=e^{\cos x}\sin(\sin x).\qquad(3.180)$$

3. Суммирование рядов с помощью преобразования Лапласа. Определение преобразования Лапласа. Предположим, что при любом $x>0$ модуль функции $\varphi(x)$ растет медленнее, чем некоторая экспоненциальная функция, т. е. существуют такие числа M и s_0, не зависящие от x, что для любого x имеет место неравенство

$$|\varphi(x)|<Me^{s_0x}.\qquad(3.181)$$

Пусть $p=s+i\sigma$ — некоторое комплексное число. Тогда интеграл

$$a(p)=\int_0^{\infty}e^{-px}\varphi(x)\,dx\qquad(3.182)$$

существует и имеет производные всех порядков в полуплоскости $\operatorname{Re}p>s_0$. Интеграл (3.182) называется *преобразованием Лапласа* функции $\varphi(x)$. Сокращенно принято называть $\varphi(x)$ *оригиналом* или *прообразом*, а функцию $a(p)$ — соответственно *изображением* или *образом*.

Для оригиналов и изображений многих функций составлены таблицы (см. например, [7]).

Суммирование числовых рядов [9]. Если для сходящегося бесконечного ряда

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(\pm 1)^k a(k)\qquad(3.183)$$

члены его представляют собой изображение оригинала $\varphi(\xi)$, т. е.

$$a(k)=\int_0^{\infty}e^{-k\xi}\varphi(\xi)\,d\xi,$$

то (с сохранением соответствия знаков $\pm$) имеет место следующая формула

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\pm 1)^k a(k) = \pm\int_0^{\infty}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{e^{\xi}\mp 1}. \tag{3.184}$$

Пример 46. Зная, что

$$\frac{a}{k^2+a^2}=\int_0^{\infty} e^{-k\xi}\sin a\xi\,d\xi,$$

согласно формуле (3.184) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+a^2}=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\frac{\sin a\xi\,d\xi}{e^{\xi}-1}=\frac{\pi}{2a}\operatorname{cth}\pi a-\frac{\pi}{a^2}.$$

Производящие функции. Если члены последовательности $\{f_k(t)\}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$, определенные в некотором интервале $\alpha < t < \beta$, являются коэффициентами разложения известной функции $F(x, t)$ в ряд Тейлора по степеням x для $|x| < 1$, т. е.

$$F(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}x^k f_k(t), \tag{3.185}$$

то $F(x, t)$ называется *производящей функцией* для последовательности $\{f_k(t)\}$. В качестве $\{f_k(t)\}$ можно, например, взять одну из следующих последовательностей:

а) степенную последовательность $t, t^2, t^3,$ причем

$$F(x, t)=\frac{xt}{1-xt}=\sum_{k=1}^{\infty}x^k t^k, \tag{3.186}$$

где $|xt| < 1$;

б) последовательность тригонометрических функций

$$\sin t, \quad \sin 2t, \quad \sin 3t,$$

или

$$\cos t, \quad \cos 2t, \quad \cos 3t,$$

причем

$$F_1(x, t)=\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}=\sum_{k=1}^{\infty}x^k\sin kt \tag{3.187}$$

и

$$F_2(x,\ t) = \frac{x \cos t - x^2}{1 - 2x \cos t + x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \cos kt, \qquad (3.188)$$

где t может меняться в любом промежутке и $|x| < 1$;

в) последовательность полиномов Чебышёва $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, ..., для которой имеет место

$$F(x,\ t) = \frac{x(t-x)}{1-2xt+x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k T_k(t), \qquad (3.189)$$

где $|t| \leqslant 1$ и $|x| < 1$;

г) последовательность полиномов Лежандра $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, ..., причем

$$F(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2xt+1}} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} x^k P_k(t), \qquad (3.190)$$

где $|t| \leqslant 1$ и $|x| < 1$.

Заметим также, что бесконечные ряды (3.186) — (3.190) при $x = \pm 1$ сходятся или колеблются в конечных пределах (т. е. сумма первых m их членов по абсолютной величине остается меньше некоторой постоянной, не зависящей от t и m).

С у м м и р о в а н и е ф у н к ц и о н а л ь н ы х р я д о в [9]. Предположим, что для бесконечной последовательности функций $\{f_k(t)\}$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ известна ее производящая функция $F(x,\ t)$ (см. выше). Пусть ряд

$$S(t,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty} a(k)\, x^k f_k(t) \qquad (3.191)$$

сходится в некотором интервале $\alpha < t < \beta$ и для $|x| \leqslant 1$. Если коэффициенты $a(k)$ ряда (3.191) как функции индекса k представляют собой изображение оригинала $\varphi(\xi)$, то для суммы ряда (3.191) имеет место формула

$$S(t,\ x) = \int_0^{\infty} \varphi(\xi)\, F(xe^{-\xi},\ t)\, d\xi. \qquad (3.192)$$

Пример 47. Зная, что для любого $l \geqslant 0$ и $k > 0$ дробь $\frac{1}{k+l}$ является изображением оригинала $e^{-\xi l}$, т. е.

$$\frac{1}{k+l} = \int_0^\infty e^{-(k+l)\xi}\, d\xi,$$

и, пользуясь формулами (3.187), (3.188) и (3.192) для целого положительного l, будем иметь

$$S_1(t,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \sin kt}{k+l} =$$

$$= x^{-l}\left\{ \sum_{m=1}^{l} \frac{C_l^m (-1)^{m-1}}{m} \left[\sum_{r=0}^{m} C_m^r (-1)^r x^r \sin(r-l)t + \sin lt \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin lt}{2} \ln(1 - 2x\cos t + x^2) + \cos lt \operatorname{arctg} \frac{x \sin t}{1 - x\cos t} \right\}, \quad (3.193)$$

$$S_2(t,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \cos kt}{k+l} =$$

$$= x^{-l}\left\{ \sum_{m=1}^{l} \frac{C_l^m (-1)^{m-1}}{m} \left[\sum_{r=0}^{m} C_m^r (-1)^r x^r \cos(r-l)t - \cos lt \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos lt}{2} \ln(1 - 2x\cos t + x^2) + \sin lt \operatorname{arctg} \frac{x \sin t}{1 - x\cos t} \right\}. \quad (3.194)$$

Формулы (3.193) и (3.194) остаются справедливыми при любом t и $|x| \leqslant 1$, за исключением точек разрыва [11], которые могут появиться для рассматриваемых тригонометрических рядов при $x = \pm 1$.

Пользуясь производящими функциями (3.186), (3.189), (3.190), а также формулой (3.192) при положительном и целочисленном l, аналогично формулам (3.193) и (3.194), можно установить также формулы суммирования для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k+l}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k T_k(t)}{k+l} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k P_k(t)}{k+l}.$$

4. Интегральные оценки для конечных сумм и бесконечных рядов. Формула Эйлера. Если функция $a(x)$ имеет производную до n-го порядка включительно для $m \leqslant x \leqslant k$ (m и k — целые положительные числа), то имеет место следующая формула Эйлера:

$$\sum_{\tau=m}^{k-1} a(\tau) = \int_m^k a(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!}\left[a^{(\nu-1)}(k) - a^{(\nu-1)}(m)\right] - \\ - \frac{1}{n!}\int_0^1 Y_n(t)\sum_{\tau=m}^{k-1} a^{(n)}(\tau+1-t)\,dt\ ^{*}), \qquad (3.195)$$

где $Y_n(t) = B_n(t) - B_n$, B_n — *числа Бернулли*, $B_n(t)$ — *многочлены Бернулли* (см. гл. VI).

Первая интегральная оценка. Предположим, что $a^{(n)}(x) \geqslant 0$ **) в промежутке $q \leqslant x \leqslant p+1$ (p и q — целые положительные числа). Обозначим наибольшее значение функции $Y_n(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ через M_n, а наименьшее значение через m_n. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$s_n(p+1,\, q) - \frac{M_n}{n!}\left[a^{(n-1)}(p+1) - a^{(n-1)}(q)\right] \leqslant \sum_{k=q}^{p} a(k) \leqslant \\ \leqslant s_n(p+1,\, q) - \frac{m_n}{n!}\left[a^{(n-1)}(p+1) - a^{(n-1)}(q)\right], \qquad (3.196)$$

где ***)

$$s_n(p+1,\, q) = \int_q^{p+1} a(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!}\left[a^{(\nu-1)}(p+1) - a^{(\nu-1)}(q)\right].$$

---

*) При $n=1$ надо считать $\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!}\left[a^{(\nu-1)}(k) - a^{(\nu-1)}(m)\right] = 0$; кроме того, здесь и всюду дальше для всякой функции $f(x)$ принято, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.

**) Если $a^{(n)}(x) \leqslant 0$, то знаки неравенства (3.196) надо менять на обратные.

***) При $n=1$ надо считать

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!}\left[a^{(\nu-1)}(p+1) - a^{(\nu-1)}(q)\right] = 0.$$

Приведем некоторые значения для величин M_n и m_n:

$M_1 = 1, m_1 = 0$; $M_2 = 0$, $m_2 = -\frac{1}{4}$; $M_3 = \frac{\sqrt{3}}{36}$, $m_3 = -\frac{\sqrt{3}}{36}$;

$M_4 = \frac{1}{16}$, $m_4 = 0$; $M_5 \approx 0{,}0244582\ldots$, $m_5 \approx -0{,}0244582\ldots$

Можно доказать, что

$$M_{2l} = Y_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \quad \text{и} \quad m_{2l} = 0, \text{ если } l \text{ — четное},$$

$$M_{2l} = 0 \quad \text{и} \quad m_{2l} = Y_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \text{ если } l \text{ — нечетное.}$$

Если сделать следующие предположения:

а) $a^{(n)}(x) \geqslant 0$ при $q \leqslant x < \infty$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} a^{(m)}(x) = 0$ при $m = 0, 1, 2, \quad n-1$;

в) интеграл $\int\limits_q^\infty a(x)\,dx$ сходится,

то при $p \to \infty$ согласно (3.196) получим

$$s_n(+\infty, q) + \frac{M_n}{n!} a^{(n-1)}(q) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=q}^{\infty} a(k) \leqslant s_n(+\infty, q) + \frac{m_n}{n!} a^{(n-1)}(q), \quad (3.197)$$

где

$$s_n(+\infty, q) = \int\limits_q^\infty a(t)\,dt - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!} a^{(\nu-1)}(q).$$

Пример 48. Зная, что производные любого порядка для функции $a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ в промежутке $1 \leqslant x \leqslant 101$ будут знакоопределенными, можно оценить значение суммы

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

пользуясь неравенством (3.196).

Например, будем иметь

$$18{,}1 < S < 19 \quad \text{при } n = 1;$$
$$18{,}55 < S < 18{,}61 \quad \text{при } n = 2;$$
$$18{,}5890 < S < 18{,}5909 \quad \text{при } n = 6.$$

Вторая интегральная оценка. Если предположить, что $(-1)^{m-1} a^{(2m)}(x) \geqslant 0$ *) для $q \leqslant x \leqslant p+1$, то имеет место оценка

$$s_{2m-1}(p+1,\ q) + \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left[a^{(2m-1)}(p+1) - a^{(2m-1)}(q)\right] \geqslant \geqslant \sum_{k=q}^{p} a(k) \geqslant s_{2m-1}(p+1,\ q), \tag{3.198}$$

где

$$s_{2m-1}(p+1, q) = \int_q^{p+1} a(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{2m-2} \frac{B_\nu}{\nu!}\left[a^{(\nu-1)}(p+1) - a^{(\nu-1)}(q)\right].$$

Если предположить:

а) $(-1)^{m-1} a^{(2m)}(x) \geqslant 0$ *) при $q \leqslant x < +\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} a^{(2k-1)}(x) = 0$ для $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$;

в) интеграл $\int_q^{\infty} a(x)\,dx$ сходится,

то имеет место следующая оценка:

$$s_{2m-1}(+\infty,\ q) - \frac{B_{2m}}{(2m)!} a^{(2m-1)}(q) \geqslant \sum_{k=q}^{\infty} a(k) \geqslant s_{2m-1}(+\infty,\ q), \tag{3.199}$$

где

$$s_{2m-1}(+\infty,\ q) = \int_q^{\infty} a(t)\,dt - \sum_{\nu=1}^{2m-2} \frac{B_\nu}{\nu!} a^{(\nu-1)}(q)\ **).$$

---

*) Если $(-1)^{m-1} a^{(2m)}(x) \leqslant 0$, то знаки неравенства (3.198) и (3.199) меняются на обратные.

**) При $m = 1$ надо положить $\sum\limits_{\nu=1}^{2m-2} \frac{B_\nu}{\nu!} a^{(\nu-1)}(q) = B_1 a(q)$.

Пример 49. Зная, что для функции $a(x) = x^{\frac{3}{2}}$ при всех $x > 0$ имеет место условие $(-1)^4 a^{\mathrm{IV}}(x) > 0$, можно произвести оценку для суммы

$$S = \sum_{k=1}^{100} k^{\frac{3}{2}},$$

пользуясь неравенством (3.198) при $m = 2$. Будем иметь

$$40501{,}2260 < S < 40501{,}2265.$$

Первая и вторая интегральные оценки могут быть использованы не только для вычисления конечных сумм и бесконечных рядов, но также и для вычисления конечных и бесконечных произведений.

Пример 50. Произведем оценку величины произведения $P = p!$.

Логарифмируя, имеем $S = \ln P = \sum\limits_{k=1}^{p} \ln k$.

Заметим, что для функции $a(x) = \ln x$ в промежутке $1 \leqslant x \leqslant p+1$ выполнены условия

$$a'(x) = \frac{1}{x} > 0, \quad a''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{и} \quad a'''(x) = \frac{2}{x^3} > 0.$$

Используя оценку (3.196), например, при $n = 3$, будем иметь

$$s_3(p+1,\ 1) - \frac{\sqrt{3}}{216}[a''(p+1) - a''(1)] \leqslant \ln P \leqslant$$
$$\leqslant s_3(p+1,\ 1) + \frac{\sqrt{3}}{216}[a''(p+1) - a''(1)], \tag{3.200}$$

где

$$s_3(p+1,\ 1) = \left(p + \frac{1}{2}\right)\ln(p+1) - p\left[1 - \frac{1}{12(p+1)}\right].$$

Потенцируя неравенство (3.200), окончательно получим

$$L_p e^{-\frac{\sqrt{3}}{216}\frac{(2+p)p}{(p+1)^2}} \leqslant p! \leqslant L_p e^{\frac{\sqrt{3}}{216}\frac{(2+p)p}{(p+1)^2}},$$

где

$$L_p = (p+1)^{p+\frac{1}{2}} e^{-p\left[1 + \frac{1}{12(p+1)}\right]}.$$

Далее рассматриваются преобразования рядов, улучшающие их сходимость.

5. Преобразование Куммера. Пусть дан ряд с положительными членами

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \tag{3.201}$$

и некоторый вспомогательный ряд

$$B_m = \sum_{n=m}^{\infty} b_n, \tag{3.202}$$

который сходится и имеет конечную сумму B_m. Пусть существует конечный предел

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} \neq 0. \tag{3.203}$$

При этих условиях ряд (3.201) сходится (см. признак III, § 1) и имеет место следующее тождество:

$$R_m = \frac{B_m}{A} + \sum_{n=m}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{A}\frac{b_n}{a_n}\right)a_n, \tag{3.204}$$

которое называется *преобразованием Куммера* для ряда (3.201).

6. Улучшение сходимости рядов, соответствующее данному признаку сходимости. Преобразованием (3.204) можно пользоваться для улучшения сходимости ряда (3.201). В самом деле, согласно (3.204) сходимость (3.201) будет улучшена в том смысле, что общий член $a_n^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{A}\frac{b_n}{a_n}\right)a_n$ преобразованного ряда $\sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(1)}$ будет стремиться к нулю быстрее, чем a_n, т. е. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{(1)}}{a_n} = 0$. Очевидно, чем быстрее отношение $\frac{b_n}{a_n}$ будет стремиться к своему конечному пределу $A \neq 0$, тем быстрее будет сходиться ряд в правой части (3.204).

Преобразование (3.204) может быть применено к одному и тому же ряду (3.201) последовательно несколько раз.

Предположим, например, что члены вспомогательных рядов

$$B_m^{(k)}=\sum_{n=m}^{\infty} b_n^{(k)} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$$

последовательно подобраны так, что

1) сумма $B_m^{(k)}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$ заранее нам известна,

2) $A_k=\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{(k)}$, где $A_n^{(k)}=\frac{b_n^{(k)}}{a_n^{(k)}}$, $a_n^{(k+1)}=\left(1-\frac{A_n^{(k)}}{A_k}\right)a_n^{(k)}$,

причем все A_k ограничены и не равны нулю.

Тогда, полагая $\frac{A_n^{(k)}}{A_k}=1-\varepsilon_n^{(k)}$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n^{(k)}=0$, после p-кратного преобразования ряда (3.201) будем иметь

$$R_m=\sum_{k=0}^{p}\frac{B_m^{(k)}}{A_k}+\sum_{n=m}^{\infty} a_n\prod_{k=0}^{p}\varepsilon_n^{(k)}. \tag{3.205}$$

Иногда может оказаться, что для некоторого k все $\varepsilon_n^{(k)}=0$, и мы получим точную сумму ряда (3.201).

Всякое преобразование типа (3.204) определяется выбором некоторого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, которому соответствует некоторый достаточный признак сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, получаемый из признака III. Именно в этом смысле и можно говорить о том, что всякому признаку сходимости, вытекающему из признака III, соответствует свой способ улучшения сходимости ряда. Практически может оказаться выгодным в преобразовании (3.205) брать все $b_n^{(0)}$, $b_n^{(1)}$, $b_n^{(2)}$, ... равными или различными, т. е. этапы улучшения сходимости выбирать в соответствии с этим по тому же или различным признакам сходимости. В качестве приложения преобразования (3.205) ниже рассматриваются приемы улучшения сходимости рядов, соответствующие признакам Даламбера и Гаусса.

Улучшение сходимости рядов, соответствующее признаку Даламбера. В тождестве (3.204) положим $b_n = a_{n+1} - a_n = \Delta a_n$ и считаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходящимся по признаку Даламбера, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1.$$

Пусть $\rho \neq 0$, тогда

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n = -\frac{a_m}{A_0} + \sum_{n=m}^{\infty}\left(a_n - \frac{\Delta a_n}{A_0}\right), \tag{3.206}$$

где

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{a_n}.$$

Применяя преобразование (3.206) к ряду

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(1)}, \quad \text{где} \quad a_n^{(1)} = a_n - \frac{\Delta a_n}{A_0},$$

еще раз, будем иметь

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(1)} = -\frac{1}{A_1}\left(1 - \frac{\Delta}{A_0}\right)a_m + \sum_{n=m}^{\infty}\left(1 - \frac{\Delta}{A_0}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{A_1}\right)a_n.$$

Здесь принята следующая символическая запись:

$$a_n - \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{A_1}\right)\Delta a_n + \frac{\Delta^2 a_n}{A_0 A_1} = \left(1 - \frac{\Delta}{A_0}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{A_1}\right)a_n,$$

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n^{(1)}}{a_n^{(1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\left(1 - \frac{\Delta}{A_0}\right)a_n}{\left(1 - \frac{\Delta}{A_0}\right)a_n}.$$

Итак, последовательное применение вышеуказанного преобразования p раз (учитывая принятие символического обозначения) для первоначального ряда дает

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n = -\frac{a_n}{A_0} - \left[\sum_{s=1}^{p-1} \prod_{k=1}^{s} \frac{1}{A_k}\left(1 - \frac{\Delta}{A_{k-1}}\right)\right] a_m + \sum_{n=m}^{\infty} \prod_{s=0}^{p-1}\left(1 - \frac{\Delta}{A_s}\right)a_n. \tag{3.207}$$

где

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{a_n} \quad \text{и} \quad A_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta \prod\limits_{s=0}^{k-1}\left(1-\frac{\Delta}{A_s}\right)a_n}{\prod\limits_{s=0}^{k-1}\left(1-\frac{\Delta}{A_s}\right)a_n},$$

$$(k=1,\ 2,\ 3,\qquad p).$$

Преобразование Эйлера. Предположим, что для степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{3.208}$$

выполнены следующие условия:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1\ ^{*)} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta^k a_{n+1}}{\Delta^k a_n} = 1 \tag{3.209}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Тогда к ряду (3.208) можно применить преобразование (3.207), которое приводит к следующему известному преобразованию Эйлера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_1 x}{1-x} + \sum_{k=1}^{p-1} \Delta^k a_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{k+1} + \\ + \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta^p a_n)\, x^n. \tag{3.210}$$

Пример 51. Пусть $a_n = P(n)$ есть некоторый многочлен степени m; легко проверить, что здесь условия (3.209) для всех $k \leqslant m$ будут выполнены и, кроме того, для любого $k > m$ будем иметь $\Delta^k a_n = 0$. Тогда, применяя формулу (3.210), при условии $|x| < 1$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n)\, x^n = \frac{P(1)\, x}{1-x} + \sum_{k=1}^{m} \Delta^k P(1) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{k+1}$$

---

*) Это обеспечивает сходимость ряда (3.208) при условии $|x| < 1$ (см. [11], т. II).

Улучшение сходимости рядов, соответствующее признаку Гаусса. Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ сходится, так как выполняются условия признака Гаусса, т. е. условия

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^\lambda + p_1 n^{\lambda-1} + \varphi(n)}{n^\lambda + q_1 n^{\lambda-1} + \psi(n)},$$

где $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ имеют порядок ниже, чем $n^{\lambda-1}$, и, кроме того, $q_1 - p_1 > 1$ (см. § 1, п. 5).

Если положить $b_n = (n+1)a_{n+1} - na_n$, то к ряду $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ можно применить преобразование (3.204). Будем иметь

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \frac{ma_m}{q_1 - p_1 - 1} + \\ + \frac{1}{q_1 - p_1 - 1} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{p_1' n^{\lambda-1} + p_2' n^{\lambda-2} + \ldots + p_\lambda'}{n^\lambda + q_1 n^{\lambda-1} + \quad + q_\lambda} a_n, \quad (3.211)$$

где $p_1', p_2', \ldots, p_\lambda'$ — некоторые новые коэффициенты, не зависящие от n. Преобразование (3.204) для ряда (3.211) можно повторить.

Пример 52. Если к ряду

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

применить преобразование (3.211) дважды, то получим

$$S = \frac{2}{3} + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Учитывая лишь три члена последнего ряда, будем иметь $S \approx \frac{59}{60}$, тогда как точная сумма $S = 1$.

Пример 53. К ряду

$$S = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \quad (3.212)$$

где

$$a_n=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}\quad \text{и}\quad \alpha+\beta-\gamma<0,$$

преобразование (3.211) может быть применено неоднократно. После p-кратного преобразования ряда (3.212) будем иметь

$$S=\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}+$$
$$+\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}\sum_{k=0}^{p-1}\prod_{s=0}^{k}\frac{(\gamma+s-\alpha)(\gamma+s-\beta)}{(\gamma+s+1)(\gamma+s+1-\alpha-\beta)}+$$
$$+\prod_{s=0}^{p}\frac{(\gamma+s-\alpha)(\gamma+s-\beta)}{\gamma+s-\alpha-\beta}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{a_n}{\prod\limits_{s=0}^{p}(n+\gamma-s)}.$$

7. Преобразование Абеля. *Преобразованием Абеля* называется тождество

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k=\alpha_nB_n+\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})B_k, \tag{3.213}$$

где $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i$. Оно является аналогом формулы интегрирования по частям для конечных сумм. Полагая в (3.213) $k\to\infty$, перейдем к бесконечным последовательностям $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$. Из (3.213) при условии, что $\{B_k\}$ ограничена и $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=0$, следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k-\alpha_{k+1})B_k. \tag{3.214}$$

Это преобразование может быть использовано для улучшения сходимости бесконечных рядов (см. [1]).

Пример 54. Улучшим сходимость тригонометрических рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k\sin kx\quad \text{и}\quad \sum_{k=1}^{\infty}u_k\cos kx,\quad \text{где}\quad \lim u_k=0,$$

зная, что

$$\sum_{i=1}^{k} \sin ix = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

и

$$\sum_{i=1}^{k} \cos ix = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Пользуясь преобразованием (3.214), положив $\alpha_k = u_k$, $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin kx = \frac{u_1 \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta u_k \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x, \tag{3.215}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \cos kx = -\frac{u_1}{2} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta u_k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x. \tag{3.216}$$

Очевидно, этими преобразованиями тригонометрических рядов выгодно пользоваться в том случае, когда u_k стремится к нулю медленно и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\Delta u_k}{u_k} = 0$. Улучшение сходимости будет тем сильнее, чем быстрее $\frac{\Delta u_k}{u_k}$ стремится к нулю.

Если к рядам (3.215) и (3.216) преобразование (3.214) применить вторично, то получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin kx = \left(u_1 - \frac{u_2}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^2 u_k \sin(k+1)x$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \cos kx = -\frac{u_1}{2} + (u_1 - u_2)\frac{\cos x}{4\sin^2\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^2 u_k \cos(k+1)x,$$

где $\Delta^2 u_k = u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k$ — разность второго порядка. Например, если $u_k = \frac{1}{k}$, то будем иметь $\Delta u_k = \frac{1}{k(k+1)}$, $\Delta^2 u_k = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ и т. д.

8. Способ А. Н. Крылова улучшения сходимости тригонометрических рядов. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то она разлагается в сходящийся ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (3.217)$$

причем коэффициенты Фурье a_n и b_n имеют, если $f(x)$ — функция ограниченной вариации, порядок $\frac{1}{n}$. Такой ряд сходится медленно. Ускорить его сходимость можно приемом выделения медленно сходящейся части. Пусть $f(x)$ имеет всюду, за исключением конечного числа точек $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_{m_0}^{(0)}$; ограниченные производные k-го порядка. В указанных точках $f(x)$ претерпевает разрыв 1-го рода, а величина скачка h_l равна

$$h_l = f\left(x_l^{(0)} + 0\right) - f\left(x_l^{(0)} - 0\right) \quad (l = 1,\ 2,\ \qquad m_0). \qquad (3.218)$$

Пусть у j-й производной также имеются разрывы 1-го рода в точках $x_1^{(j)}$, $x_2^{(j)}$, ..., $x_{m_j}^{(j)}$ с величиной скачка

$$h_l^{(j)} = f^{(j)}\left(x_l^{(j)} + 0\right) - f^{(j)}\left(x_l^{(j)} - 0\right) \qquad (3.219)$$

$$(l = 1, 2, \ldots, m_j;\ j = 1, 2, \ldots, k).$$

Тогда $f(x)$ можно представить в форме

$$f(x) = \sum_{l=1}^{m_0} \frac{1}{\pi} h_l^{(0)} \sigma_0\left(x - x_l^{(0)}\right) + \sum_{l=1}^{m_1} \frac{1}{\pi} h_l^{(1)} \sigma_1\left(x - x_l^{(1)}\right) + \ldots + \sum_{l=1}^{m_k} \frac{1}{\pi} h_l^{(k)} \sigma_k\left(x - x_l^{(k)}\right) + \varphi(x), \qquad (3.220)$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=1}^{m_j} h_l^{(j)} \sigma_j\left(x - x_l^{(j)}\right) + \varphi(x), \qquad (3.221)$$

где

$$\sigma_0(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nu}{n}=\begin{cases}\dfrac{-\pi-u}{2} & \text{при}\quad -2\pi<u<0,\\ \dfrac{\pi-u}{2} & \text{при}\quad 0<u<2\pi,\\ 0 & \text{при}\quad u=0,\ 2\pi,\ -2\pi.\end{cases} \tag{3.222}$$

$$\sigma_1(u)=\int_0^{\infty}\sigma_0(u)\,du-\frac{\pi^2}{6}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nu}{n^2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{(\pi+u)^2}{4} & \text{при}\quad -2\pi\leqslant u\leqslant 0,\\ \dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{(\pi-u)^2}{4} & \text{при}\quad 0\leqslant u\leqslant 2\pi.\end{cases} \tag{3.223}$$

Интегрируя еще раз, получаем $\sigma_2(u)$:

$$\sigma_2(u)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nu}{n^3}=\frac{3\pi u^2-2\pi^2u-u^3}{12}\quad(0\leqslant u\leqslant 2\pi). \tag{3.224}$$

Функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе с k первыми производными и ряд Фурье для нее

$$\varphi(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$$

сходится быстро, так как коэффициенты α_n и β_n имеют порядок $\frac{1}{n^{k+2}}$. Ряд для функции $f(x)$, если учесть разложения (3.222) — (3.224), будет

$$f(x)=\sum_{l=1}^{m_0}\frac{1}{\pi}h_l^{(0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x-x_l^{(0)}\right)}{n}-$$

$$-\sum_{l=1}^{m_1}\frac{1}{\pi}h_l^{(1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\left(x-x_l^{(1)}\right)}{n^2}-$$

$$-\sum_{l=1}^{m_2}\frac{1}{\pi}h_l^{(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x-x_l^{(2)}\right)}{n^3}+$$

$$\ldots+\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx). \tag{3.225}$$

Таким образом из ряда Фурье (3.217) выделяются медленно сходящиеся части.

Часто, не имея самой функции, мы получаем каким-либо способом ее ряд Фурье, причем, если этот ряд сходится медленно, то он мало пригоден для вычисления значений самой функции, не говоря уже о ее производных. В этом случае часто удается провести улучшение сходимости, если использовать известные ряды для $\sigma(x-x_0)$ и т. д. Покажем это на примере [3].

Пример 55. Дан ряд Фурье

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2-1}\sin nx \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi). \quad (3.226)$$

Выделим из коэффициента низшие степени $\frac{1}{n}$:

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5-n^3}.$$

Тогда исходный ряд можно разбить на три:

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin nx-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3}\sin nx-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^5-n^3}\sin nx. \quad (3.227)$$

Первые два ряда суммируются в конечном виде:

$$S_1(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin nx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\sigma_0\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_0\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]; \quad (3.228)$$

$$S_2(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3}\sin nx =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n^3} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\sigma_2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (3.229)$$

Пользуясь (3.222) и (3.224), получаем:

$$S_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{x-\pi}{\pi} & \left(\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\right), \\ 0 & \left(x = \frac{\pi}{2}\right); \end{cases} \quad (3.230)$$

$$S_2(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{6\pi}+\frac{\pi}{24}x & \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \\ -\frac{(x-\pi)^3}{6\pi}+\frac{\pi}{24}(x-\pi) & \left(\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi\right). \end{cases} \quad (3.231)$$

Следовательно,

$$f(x) = S_1(x) + S_2(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\sin nx \quad (3.232)$$

Оставшийся ряд сходится быстро (порядок его коэффициентов $\frac{1}{n^5}$) и полученное выражение (3.232) позволяет легко вычислять значения функции и ее первых производных.

В том случае, когда приведенных выше рядов для σ_0, σ_1, σ_2 недостаточно для улучшения сходимости, может оказаться полезным ряд:

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots =$$
$$= -\mathrm{Re}\left[\ln\left|1-e^{ix}\right|\right] = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| \quad (3.233)$$

и ему аналогичный:

$$\frac{\cos 2x}{1\cdot 2}+\frac{\cos 3x}{2\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 4}+\ldots=$$
$$=(1-\cos x)\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\sin x+\cos x. \qquad (3.234)$$

Пользуясь указанными рядами, можно улучшить сходимость любого ряда вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A\left(\frac{1}{n}\right)\sin nx_0+B\left(\frac{1}{n}\right)\cos nx_0\right)\sin nx+\right.$$
$$\left.+\left(C\left(\frac{1}{n}\right)\sin nx_0+D\left(\frac{1}{n}\right)\cos nx_0\right)\cos nx\right],$$

где $A\left(\frac{1}{n}\right)$, $B\left(\frac{1}{n}\right)$, $C\left(\frac{1}{n}\right)$, $D\left(\frac{1}{n}\right)$ — аналитические функции от $\frac{1}{n}$ для малых значений аргумента.

9. Способ А. С. Малиéва улучшения сходимости тригонометрических рядов. Ряд Фурье для функции, имеющей производные всех порядков внутри интервала $(0, 2\pi)$, причем сама функция или одна из ее производных имеют различные значения при $x=0$ и $x=2\pi$, сходится медленно. А. С. Малиевым предложен способ получения быстро сходящихся тригонометрических разложений функций этого вида, состоящий в следующем.

Пусть заданная в интервале $(0, \pi)$ функция $f(x)$ имеет на нем непрерывные производные до $(k-1)$-го порядка включительно и k-я производная удовлетворяет условиям Дирихле. Эту функцию можно разложить в ряд по функциям $\cos 2nx$ и $\sin 2nx$, либо в ряд по одним $\sin nx$ или по одним $\cos nx$ (в зависимости от того, четно или нечетно продолжена $f(x)$ на интервал $(-\pi, 0)$). Ряды эти, вообще говоря, сходятся медленно. Добиться порядка $\frac{1}{n^{k+1}}$ в коэффициентах Фурье можно, если предварительно продолжить функцию на интервал $(-\pi, 0)$ таким образом, чтобы при периодическом продолжении на всю действительную ось функция имела бы k производных, причем k-я производная удовлетворяла бы условию Дирихле.

Для этого возьмем $f(x)$ на интервале $(-\pi, 0)$ в форме, например, многочлена $(2k-1)$-й степени $\varphi(x)$, имеющего со своими производными до $(k-1)$-го порядка в точках 0 и π значения, соответственно равные значениям $f(x)$ и ее производных при $x=0$ и $x=\pi$. Удобно выбрать $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x)=(x+\pi)^k\left[A_0+A_1x+\ldots+\frac{A_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}\right]+$$
$$+x^k\left[B_0+B_1(x+\pi)+\ldots+\frac{B_{k-1}}{(k-1)!}(x+\pi)^{k-1}\right].$$

Тогда коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$; $B_0, B_1, \qquad B_{k-1}$ определяются последовательно из уравнений:

$$\varphi(0)=\pi^kA_0=f(0),$$
$$\varphi'(0)=k\pi^{k-1}A_0+\pi^kA_1=f'(0),$$

$$\varphi^{(k-1)}(0)=C_{k-1}^0k(k-1)\ldots2\pi A_0+C_{k-1}^1k(k-1)\ldots3\pi^2A_1+\ldots$$
$$+C_{k-1}^{k-2}k\pi^{k-1}A_{k-2}+C_{k-1}^{k-1}\pi^kA_{k-1}=f^{(k-1)}(0);$$

$$\varphi(-\pi)=(-\pi)^kB_0=f(\pi),$$
$$\varphi'(-\pi)=k(-\pi)^{k-1}B_0+(-\pi)^kB_1=f'(\pi),$$

$$\varphi^{(k-1)}(-\pi)=C_{k-1}^0k(k-1)\ldots2(-\pi)B_0+$$
$$+C_{k-1}^1k(k-1)\ldots3(-\pi)^2B_1+$$
$$\ldots+C_{k-1}^{k-1}(-\pi)^kB_{k-1}=f^{(k-1)}(\pi).$$

После построения многочлена $\varphi(x)$ получаем функцию

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{при } -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ f(x) & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

Эта функция, продолженная периодически, имеет $k-1$ непрерывных производных и k-ю производную, удовлетворяющую условиям Дирихле. Ряд Фурье для $\psi(x)$ сходится как $\frac{1}{n^{k+1}}$ и на интервале $(0, \pi)$ дает функцию $f(x)$.

Пример 56 [3].

$$f(x)=x-\frac{\pi}{2}\qquad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

Пусть $k=3$ $\left(\text{для сходимости порядка } \frac{1}{n^4}\right)$. Тогда

$$\varphi(x)=(x+\pi)^3\left(-\frac{1}{2\pi^2}-\frac{5}{2\pi^3}x-\frac{6}{\pi^4}x^2\right)+$$
$$+x^3\left[-\frac{1}{2\pi^2}-\frac{5}{2\pi^3}(x+\pi)-\frac{6}{\pi^4}(x+\pi)^2\right].$$

Разлагая в ряд функцию

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & (-\pi\leqslant x\leqslant 0),\\ f(x) & (0\leqslant x\leqslant\pi),\end{cases}$$

получим

$$f(x)=\frac{240}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5\ldots}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{12}{\pi^2n^6}\right)\cos nx+$$
$$+\frac{1440}{\pi^4}\sum_{n=2,4,6,\ldots}\frac{1}{n^5}\sin nx.$$

ГЛАВА IV

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Введение

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется *ортогональной* на интервале (a, b), если при $i \neq j$

$$\int_a^b f_i(x) f_j(x)\, dx = 0.$$

В анализе большую роль играют представления функций в виде *ортогональных рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x),$$

т. е. рядов по ортогональной системе функций. Классическим примером ортогональных рядов являются тригонометрические ряды.

Теория ортогональных рядов возникла в связи с решением задач математической физики так называемым методом Фурье. С помощью ортогональных рядов решаются и линейные интегральные уравнения с симметрическим ядром.

Теория ортогональных систем функций имеет замечательную аналогию с теорией ортогональных систем векторов (см. гл. II, § 1). Эта аналогия была замечена давно и отразилась в терминологии. В дальнейшем она привела к концепции *пространства Гильберта* — бесконечномерному аналогу n-мерных евклидовых пространств (см. гл. II), причем ортогональные системы функций играют роль ортогональных систем векторов в гильбертовых пространствах. При этом, чтобы теория ортогональных систем функций приобрела законченность, пришлось обобщить основные понятия анализа, в частности понятие интеграла, что привело к так называемому *интегралу Лебега*.

В настоящей главе излагается более элементарная часть теории, главным образом, ее «выкладочная» сторона. Везде в этой главе, если это не оговорено особо, интеграл понимается в смысле Римана.

n-мерные векторы можно интерпретировать как функции, определенные в n точках; такая интерпретация изложена в общих чертах в § 1, п. 1; при этом аналогия с ортогональными рядами функций выступает более рельефно. В § 2, п. 6 дается представление о биортогональных системах функций — аналоге биортогональных систем векторов. Первый пример таких систем дан П. Л. Чебышевым в связи с задачей интерполяции.

Ортогональные системы функций связаны с задачей приближения сложных функций более простыми, когда мерой близости двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ является их квадратическое уклонение

$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx.$$

Задача о наилучшем приближении (с этой точки зрения) функций многочленами привела к созданию теории ортогональных многочленов (простейшей системе ортогональных функций). Первым примером ортогональных систем многочленов была система многочленов Лежандра. Общая теория ортогональных систем многочленов принадлежит П. Л. Чебышеву. Этой теории посвящен § 3.

С единой точки зрения классические системы ортогональных многочленов изложены в § 4, пп. 1—4.

Последние пункты § 4 посвящены конкретным системам многочленов — Лежандра, Якоби, Чебышева, Эрмита, Лагерра (а также аналогу Чебышева многочленов Лежандра для конечного числа точек). С помощью отрезков рядов по ортогональным многочленам можно найти в ряде случаев и хорошие равномерные приближения функций. Особенно часто такие приближения дают отрезки рядов по многочленам Чебышева (см. § 4, п. 7).

§ 1. Ортогональные системы

1. Ортогональные системы функций, определенных в n точках. Логически простейшими примерами *ортогональных систем функций* являются системы функций, определенных в n точках. Ограничимся случаем функций одного переменного (хотя все сказанное непосредственно обобщается на функции многих переменных).

Имеются конечное множество чисел (или точек числовой прямой) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и функции $f(x_i)$, определенные в этих точках. Каждую такую функцию можно рассматривать как вектор f с компонентами $f_i = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. «Длина» или норма такого вектора есть

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2}. \tag{4.1}$$

Совокупность этих векторов (функций) образует n-мерное евклидово пространство, которое обозначается символом $E_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (см. гл. II).

Базис в $E_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ состоит из любой системы n линейно независимых функций $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$ на множестве $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Ортогональные системы в $E_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функции $f(x_i)$ и $\varphi(x_i)$ *ортогональны* на множестве точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если

$$(f, \varphi) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(x_i) = 0, \tag{4.2}$$

что отвечает ортогональности векторов с координатами f_i и φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Система функций $f^{(k)}(x_i)$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$ из $E_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *ортогональной*, если

$$(f^{(j)}, f^{(k)}) = \begin{cases} \|f^{(j)}\|^2 > 0 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j. \end{cases} \tag{4.3}$$

Ортогональная система из n функций называется *полной*.

Существует в $E_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ бесконечное множество ортогональных систем из n функций $\{f^{(j)}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Функции каждой такой системы образуют *ортогональный базис* в пространстве $E_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Каждая функция $f(x_i)$ из $E_n(x_1, \ldots, x_n)$ линейно выражается через функции ортогонального базиса.

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j f^{(j)}(x_i). \tag{4.4}$$

Коэффициенты c_j в (4.4) называются *«коэффициентами Фурье»* функции f по системе функций $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$, причем

$$c_j = (f, f^{(j)}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f^{(j)}(x_i). \tag{4.5}$$

Коэффициент c_j есть *проекция* вектора f на базисный вектор $f^{(j)}$.

Если для всех $f^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ортогонального базиса имеет место равенство $\|f^{(j)}\| = 1$, то базис называется *ортонормированным*. Если базис $f^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ортонормирован, то для любой функции $f(x_i)$ из $E_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеем

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{n} c_j^2, \tag{4.6}$$

где c_j — коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе $(f^{(j)})$ (следует из формулы (4.4) и линейных свойств скалярного произведения).

Если ортогональная нормированная $(\|f^{(j)}\| = 1)$ система не полная, т. е. число ее элементов $l < n$, то вместо равенства (4.6) получается неравенство

$$\|f\|^2 \geqslant \sum_{j=1}^{l} c_j^2. \tag{4.7}$$

Равенство (4.6) и неравенство (4.7) в пределе при $n \to \infty$ переходят в соответствующие *равенство Парсеваля* и *неравенство Бесселя* (см. § 2, п. 4).

3. Наилучшее квадратическое приближение. *Квадратическим приближением* функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ по системе точек $x_1, x_2, \quad x_n$ называется

$$\|f - \varphi\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \varphi(x_i))^2}, \tag{4.8}$$

Будем рассматривать *«обобщенные многочлены»* l-го порядка, т. е. функции вида

$$\sum_{k=1}^{l} d_k f^{(k)}(x_i), \tag{4.9}$$

где $\{f^{(k)}\}$ $(k=1, 2, \ldots, l;\ l<n)$ — ортогональная система функций из $E_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теорема 1. *Среди всех «обобщенных многочленов» l-го порядка $(l \leqslant n)$ наилучшее квадратическое приближение функции $f(x_i)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дает «многочлен» вида*

$$\sum_{k=1}^{l} c_k f^{(k)}(x_i), \tag{4.10}$$

где c_k — «коэффициенты Фурье».

Этот многочлен l-го порядка совпадает с суммой первых l членов суммы (4.4). При $l=n$ это наилучшее приближение равно нулю.

4. Ортогональные системы тригонометрических функций. Важнейшими примерами ортогональных систем на конечном множестве точек являются, во-первых, *ортогональные системы многочленов*, введенные П. А. Чебышевым (см. § 4, п. 11), во-вторых, *ортогональные системы тригонометрических функций.*

Пример 1. На системе $2n$ точек $x_i = \frac{i\pi}{n}$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n-1, -n)$ ортогональной является система функций $\{\cos kx_i\}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$. Всякая четная функция $f(x_i)$, определенная в этих точках, представима суммой

$$f(x_i) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k \cos kx_i, \tag{4.11}$$

где

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{n-1} f(x_i) \cos kx_i.$$

Пример 2. На системе $2n-1$ точек $x_i = \frac{i\pi}{n}$ $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n-1, -n)$ ортогональной является система $n-1$

функций $\{\sin kx_i\}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$. Всякая нечетная функция $\varphi(x_i)$, определенная в этих точках, представима суммой

$$\varphi(x_i)=\sum_{k=1}^{n-1} c_k \sin kx_i, \tag{4.12}$$

где

$$c_k=\frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n-1} \varphi(x_i) \sin kx_i.$$

Пример 3. На системе $2n$ точек

$$x_i=\frac{i\pi}{n}\,(i=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n-1,\ -n)$$

ортогональной является система $2n$ функций $\{\cos kx,\ \sin lx\}$, где $k=0, 1, 2, \ldots, n$; $l=1, 2, \ldots, n-1$.

Всякая функция $\psi(x_i)$, определенная в этих точках, представима в виде

$$\psi(x_i)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx_i+b_k \sin kx_i), \tag{4.13}$$

где

$$a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n-1} \psi(x_i) \cos kx_i,$$

$$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n-1} \psi(x_i) \sin kx_i.$$

Формула (4.13) переходит в формулу (4.11), если $\psi(x)$ — четная функция, и в формулу (4.12), если $\psi(x)$—нечетная функция.

Любая периодическая функция $\psi(x_i)$, определенная во всех точках $x_i=\frac{i\pi}{n}$, где i — любое целое число, представима по формуле (4.13), а в случае ее четности или нечетности—по формулам (4.11) и (4.12).

Эти формулы, найденные Эйлером и Лагранжем, при $n\to\infty$ переходят в формулы (4.42) и (4.43). Они лежат в основе численных методов гармонического анализа.

§ 2. Общие свойства ортогональных и биортогональных систем

1. Ортогональность. Скалярное (внутреннее) произведение. Известное свойство ортогональности двух векторов в евклидовом пространстве n измерений состоит в том, что их скалярное произведение равно нулю (см. гл. II, § 1, п. 3). По аналогии с понятием ортогональности векторов определяется понятие ортогональности функций.

Скалярным (внутренним) произведением функций $f(x)$ *и* $g(x)$ *на* $[a, b]$ называется выражение

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx. \tag{4.14}$$

(Здесь, естественно, предполагается, что $f(x) \cdot g(x)$ интегрируемо на $[a, b]$.) Если

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0,$$

то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *ортогональными на* $[a, b]$.

Пример 4. Функции $\sin x$ и $\cos x$ ортогональны на отрезке $[0, \pi]$, так как

$$\int_0^\pi \sin x \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^\pi = 0.$$

Дальнейшим обобщением понятия ортогональности является понятие *ортогональности функций по весу.*

Пусть $p(x)$ некоторая фиксированная неотрицательная на $[a, b]$ функция.

Любые две функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, p(x)\, dx = 0, \tag{4.15}$$

называются *ортогональными на отрезке* $[a, b]$ *по весу* $p(x)$.

Пример 5. Функции $\sin(n \arccos x)$ и $\cos(n \arccos x)$ ортогональны на $[-1, +1]$ по весу $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, так как

$$\int_{-1}^{+1} \sin(n \arccos x) \cos(n \arccos x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin nu \cdot \cos nu \, du = 0.$$

Все рассматриваемые в этой главе интегралы считаем существующими в смысле Римана.

Для функций $f(x)$, $g(x)$ и веса $p(x)$, не интегрируемых по Риману, но интегрируемых по Лебегу, понятие ортогональности естественным образом обобщается.

Пусть функция $p(x)$ неотрицательна на $[a, b]$, отлична от нуля на множестве меры нуль и интегрируема по Лебегу на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^l p(x)\, dx > 0.$$

Пусть функция $f(x)$ такова, что $\int_a^b f^2(x)\, dx$ существует в смысле Лебега. Тогда существует и $\int_a^b f^2(x) p(x)\, dx$. В этом случае говорят, что $f(x)$ *интегрируема по весу* $p(x)$ *на* $[a, b]$ *с квадратом* (в смысле Лебега), и обозначают множество таких функций через $L^2_{p(x)}(a, b)$.

Если $p(x) \equiv 1$, то обозначают просто $L^2(a, b)$.

Например, функция $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ принадлежит $L^2(0, 1)$, а $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ не принадлежит $L^2(0, 1)$.

Имеет место следующее предложение: если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $L^2_{p(x)}(a, b)$, то существует

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, p(x)\, dx$$

и выполняется *неравенство Коши — Буняковского*:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,p(x)\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,p(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,p(x)\,dx}$$

(являющееся обобщением соответствующего неравенства для векторов, см. гл. II, § 1, п. 2).

Скалярным произведением в $L^2_{p(x)}(a, b)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ называется выражение

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,p(x)\,dx.$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ из $L^2_{p(x)}(a, b)$ называются *ортогональными по весу* $p(x)$, если $(f, g) = 0$.

Пусть $\sigma(x)$ — неубывающая функция на $[a, b]$. Будем рассматривать функции $f(x)$, для которых существует *интеграл Стилтьеса*

$$\int_a^b f^2(x)\,d\sigma(x).$$

$\left(\text{Тогда существует и } \int_a^b f(x)\,d\sigma(x).\right)$ Множество таких функций будем обозначать через $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$.

Для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$ существует

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,d\sigma(x) \tag{4.16}$$

и имеет место соответствующее неравенство Коши — Буняковского. Интеграл (4.16) называется *скалярным* (*внутренним*) *произведением функций* $f(x)$ и $g(x)$ из $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *ортогональными по «интегральному» весу* $\sigma(x)$, если

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,d\sigma(x) = 0,$$

т. е. равно нулю их скалярное произведение.

В случае, когда $\sigma(x)$ имеет конечное число точек роста: x_1, x_2, ..., x_n, интеграл (4.16) превращается в конечную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, g(x_i)\,[\sigma(x_i+0)-\sigma(x_i-0)]. \tag{4.17}$$

Если все скачки $\sigma(x)$ равны 1, т. е.

$$\sigma(x_i+0)-\sigma(x_i-0)=1$$

для всех i, то (4.17) превращается в

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, g(x_i). \tag{4.18}$$

Здесь на ортогональность функций f и g влияют только значения их в конечном числе точек — точках роста функции $\sigma(x)$. В связи с этим можно рассматривать функции f и g, как заданные только в этих точках (как в § 1, п. 1). Тогда (4.18) есть обычное скалярное произведение векторов $\bar{f}$ и $\bar{g}$ из $E_n(x_1, \ldots, x_n)$. Случай, когда $\sigma(x)$ имеет конечное число точек роста, есть особый случай еще и потому, что только в этом случае существует лишь n линейно независимых ортогональных между собой функций (см. § 1, п. 1).

Введенные выше понятия ортогональности двух функций объединяются общим свойством: внутреннее произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ в каждом из рассмотренных случаев равно нулю. Все дальнейшие рассмотрения (если это не оговорено особо) не зависят от того, каким из рассмотренных способов введено понятие внутреннего произведения. Поэтому в дальнейшем будем внутреннее произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ обозначать вообще символом (f, g), понимая под ним любое из рассмотренных выше определений. Случай, когда

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\sigma(x)$$

объединяет все другие определения скалярного произведения. Случай «дифференциального» веса $p(x)$ получается отсюда, когда $\sigma(x)$ имеет интегрируемую производную, тогда

$d\sigma(x) = p(x)\,dx$, и интеграл (4.16) превращается в

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,p(x)\,dx.$$

Ортогональность без веса есть случай, когда $d\sigma(x) = dx$. Ортогональность функций, определенных в конечном числе точек, соответствует конечному числу точек роста функции $\sigma(x)$.

Поэтому в дальнейшем, когда это будет нужно, будем для (f, g) пользоваться выражением (4.16).

Скалярное произведение функции $f(x)$ на $f(x)$, т. е. (f, f), обычно обозначают $\|f\|^2$ и величину $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ называют *квадратичной нормой функции*. Эта величина является нормой $f(x)$ в соответствующем нормированном пространстве.

Величина

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_a^b (f - g)^2\,d\sigma(x)}$$

называется *квадратическим уклонением* функций $f(x)$ и $g(x)$. Эта величина является в известном смысле мерой близости функций $f(x)$ и $g(x)$.

2. Ортогональные системы функций Бесселя, Хаара и др. Пусть любые две функции последовательности

$$\varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\qquad \varphi_n(x),$$

ортогональны на (a, b), т. е. $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, если $i \neq j$.

Такую последовательность функций называют *ортогональной системой функций* на (a, b). Если система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

ортогональна и каждая из функций отлична от нуля, то ортогональной является и система функций

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1(x)\|},\ \psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\|\varphi_2(x)\|},\ \ldots,\ \psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|},$$

Каждая функция этой системы удовлетворяет условию

$$\|\psi_i(x)\| = \sqrt{(\psi_i, \psi_i)} = 1. \tag{4.19}$$

Такие системы наиболее удобны. Они называются *ортонормированными* (или *ортонормальными*).

Ортогональная система

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

называется *полной в пространстве* $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$, если среди всех функций из $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$ нет функции, отличной от нуля и ортогональной ко всем функциям системы

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

т. е. из того, что

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\, d\sigma(x) = 0$$

для всех n, следует, что

$$f(x) \equiv 0$$

(за исключением, быть может, множества меры нуль).

В случае конечного числа точек роста $\sigma(x)$ полная система содержит столько функций, сколько точек роста у функции $\sigma(x)$.

Пример 6. Система функций

$$\sin x, \quad \sin 2x, \quad \ldots, \quad \sin nx, \quad \ldots \tag{4.20}$$

ортогональна на $(0, \pi)$, так как

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Система полная.

Пример 7. Система функций

$$1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \quad \ldots, \quad \cos nx, \quad \ldots \tag{4.21}$$

ортогональна на $(0, \pi)$, так как

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Система полная.

Пример 8. Система функций

$$1, \ \sin x, \ \cos x, \ \sin 2x, \ \cos 2x, \ \ldots, \ \sin nx, \ \cos nx, \tag{4.22}$$

ортогональна на $(0, 2\pi)$, так как

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \quad \text{при} \quad \text{всех } m \text{ и } n,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots; \ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Система полная.

Система функций Бесселя. Пусть $J_n(x)$ — функция Бесселя порядка n, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$J_n(x) = 0$$

или уравнения

$$J'_n(x) = 0.$$

Тогда система функций:

$$J_n(\lambda_1 x), \quad J_n(\lambda_2 x), \quad J_n(\lambda_3 x), \quad \ldots \quad J_n(\lambda_i x), \ \ldots \tag{4.23}$$

ортогональна на $[0, 1]$ по весу x, так как при $i \neq j$

$$\int_0^1 J_n(\lambda_i x) J_n(\lambda_j x) \, x \, dx = 0.$$

Система (4.23) полная.

Система функций Хаара. В последнее время начинает находить применение *ортогональная система Хаара*. Эта система состоит из кусочно-постоянных функций $\chi_n^k(t)$, где

$$\left.\begin{aligned}
&\chi_0^{(0)}(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \in [0,\ 1];\\
&\chi_0^{(1)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right),\\ -1 & \text{при} \quad t \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right],\\ 0 & \text{при} \quad t = \frac{1}{2};\end{cases}\\
&\chi_1^{(1)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{при} \quad t \in \left[0,\ \frac{1}{4}\right),\\ -\sqrt{2} & \text{при} \quad t \in \left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right],\\ 0 & \text{в остальных точках};\end{cases}\\
&\chi_1^{(2)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{при} \quad t \in \left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right),\\ -\sqrt{2} & \text{при} \quad t \in \left(\frac{3}{4},\ 1\right],\\ 0 & \text{в остальных точках};\end{cases}\\
&\chi_2^{(1)}(t) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad t \in \left[0,\ \frac{1}{8}\right),\\ -2 & \text{при} \quad t \in \left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{4}\right],\\ 0 & \text{в остальных точках};\end{cases}\\
&\chi_2^{(2)}(t) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad t \in \left[\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right),\\ -2 & \text{при} \quad t \in \left(\frac{3}{8},\ \frac{1}{2}\right],\\ 0 & \text{в остальных точках};\end{cases}\\
&\chi_2^{(3)}(t) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad t \in \left[\frac{1}{2},\ \frac{5}{8}\right),\\ -2 & \text{при} \quad t \in \left(\frac{5}{8},\ \frac{3}{4}\right],\\ 0 & \text{в остальных точках};\end{cases}\\
&\chi_2^{(4)}(t) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad t \in \left[\frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right),\\ -2 & \text{при} \quad t \in \left(\frac{7}{8},\ 1\right],\\ 0 & \text{в остальных точках}.\end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad (4.24)$$

Вообще,

$$\chi_n^{(1)}(0) = \sqrt{2^n}, \quad \chi_n^{(2^n)}(1) = +\sqrt{2^n}.$$

$$\chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } t \in \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } t \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right], \\ 0 & \text{в остальных точках } [0, 1]. \end{cases} \tag{4.25}$$

Функции Хаара являются производными от *«многоугольных»* функций из базиса Шаудера. Ортогональность системы Хаара следует из того, что при одном и том же n

$$\chi_n^{(j)}(t)\,\chi_n^{(k)}(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad j > k \geqslant 1,$$

следовательно, и

$$(\chi_n^{(j)}, \chi_n^{(k)}) = 0.$$

При разных нижних индексах m и n, где $m > n$, и любых j и k подынтервалы, где $\chi_m^{(k)}(t) \neq 0$, целиком содержатся в интервалах постоянства $\chi_n^j(t)$ при $m > n$

$$\int_0^1 \chi_m^{(k)}(t)\,\chi_n^{(j)}(t)\,dt = \lambda \int_{\frac{2k-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2k}{2^{m+1}}} \chi_m^{(k)}(t)\,dt = \lambda\left(\frac{\sqrt{2^m}}{2^{m+1}} - \frac{\sqrt{2^m}}{2^{m+1}}\right) = 0,$$

где λ — значение $\chi_n^{(j)}$ на интервале постоянства.

Система функций Хаара обладает важным аппроксимационным свойством: ряд Фурье (см. гл. III) любой непрерывной функции по системе Хаара сходится к ней равномерно на [0, 1].

Понятие ортогональности функций одного переменного на отрезке обобщается естественным образом и на функции нескольких переменных, определенные в некоторой области.

Функции $f(P)$ и $g(P)$ точки P пространства называются *ортогональными по области* D этого пространства, если n-мерный интеграл

$$\int_D f(P)\,g(P)\,dP = 0. \tag{4.26}$$

Так же определяется *ортогональность* $f(P)$ и $g(P)$ *по* *весу* $k(P)$:

$$\int\limits_D f(P)\, g(P)\, k(P)\, dP = 0. \tag{4.27}$$

Пример 9. Задача о колебании плоской закрепленной мембраны приводит к дифференциальному уравнению

$$\Delta U + \lambda U = 0$$

(где Δ — *оператор Лапласа*) с граничным условием $U = 0$. Собственные функции этого уравнения, соответствующие различным значениям λ, ортогональны:

$$\iint\limits_G U_i(x, y)\, U_k(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Пример 10. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ — система функций, ортогональных на отрезке $[a, b]$. Тогда система функций

$$U_{i,j}(x, y) = \varphi_i(x)\, \varphi_j(y) \tag{4.28}$$

ортогональна по площади на квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$.

Действительно,

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(y)\, \varphi_k(x)\, \varphi_l(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx \int\limits_a^b \varphi_j(y)\, \varphi_l(y)\, dx\, dy = 0,$$

если либо $i \neq k$, либо $j \neq l$, т. е. если $U_{i,j}(x, y)$ и $U_{k,l}(x, y)$ — разные функции системы (4.28).

Системы вида (4.28) используются, например, при разложении симметричного ядра интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x) \tag{4.29}$$

в ряд по собственным функциям этого уравнения.

Если $\{\varphi_i(x)\}$ — нормированная система собственных функций уравнения (4.29), соответствующих собственным значениям $\frac{1}{\lambda_i}$, а $\{O_i(x)\}$ — система собственных функций, соответствующих нулевому собственному значению, то система функций (где i и j — любые):

$$\varphi_i(x)\, \varphi_j(s), \quad O_i(x)\, \varphi_j(s), \quad \varphi_i(x)\, O_j(s), \quad O_i(x)\, O_j(s), \tag{4.30}$$

ортогональна на квадрате $(a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant s \leqslant b)$, так как система $\{\varphi_i(x), O_j(x)\}$ ортогональна на $[a, b]$.

Система (4.30) полна в пространстве функций, интегрируемых с квадратом на $(a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b)$. Поэтому функция $K(x, s)$, интегрируемая с квадратом, разлагается в ряд по этой системе. Коэффициенты Фурье функции $K(x, s)$ по функциям $\varphi_i(x)\varphi_j(s)$ при $i \neq j$, $O_i(x)\varphi_j(s)$ и $\varphi_i(x)O_j(s)$ при любых i и j равны нулю, а по функциям $\varphi_i(x)\varphi_i(s)$ равны $\frac{1}{\lambda_i}$ в силу соотношений

$$\int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)\,dx\,ds = \int_a^b \varphi_i(x)\int_a^b K(x, s)\varphi_j(s)\,ds = \\ = \frac{1}{\lambda_j}\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j,$$

$$\int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi_i(x)O_j(s)\,dx\,ds = \int_a^b \varphi_i(x)\int_a^b K(x, s)O_j(s)\,ds = 0,$$

$$\int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi_i(x)\varphi_i(s)\,dx\,ds = \int_a^b \varphi_i(x)\int_a^b K(x, s)\varphi_i(s)\,ds = \\ = \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_i(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Поэтому

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(x)\varphi_i(s).$$

Аналогично введенному выше понятию ортогональности функций на области D n-мерного пространства рассматриваются также понятия ортогональности функций по поверхностям и линиям. Например, по поверхности шара ортогональными являются *сферические функции Лапласа.*

3. Линейная независимость. Процесс ортогонализации. Система n функций называется *линейно независимой*, если для любой системы n числовых множителей, для которой

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 > 0,$$

функция $\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)+\ldots+\lambda_n\varphi_n(x)$ отлична от нуля. Если же существует такая система множителей λ_i, что

$$\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)+\ldots+\lambda_n\varphi_n(x)\equiv 0, \qquad (4.31)$$

где хотя бы один коэффициент λ_i отличен от нуля, то система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ называется *линейно зависимой*. (В случае функций из $L_p^2(a, b)$ равенство (4.31) может иметь место для линейно независимой системы на множестве меры нуль.)

Понятие линейной независимости функций аналогично понятию линейной независимости векторов n-мерного векторного пространства (см. гл. II, § 1, п. 4).

Пусть для каждой пары $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(x)$ системы функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ определено внутреннее произведение (φ_i, φ_j).

По аналогии с определителем Грама для системы векторов (см. гл. II, § 1, п. 5) вводится определитель

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & & (\varphi_1, \varphi_n) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & & (\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot & & \\ (\varphi_n, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_2) & & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}, \qquad (4.32)$$

который называется *определителем Грама системы функций* $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$.

Свойства определителя Грама. 1°. Для любой системы функций определитель Грама $\Delta_n \geqslant 0$.

2°. Пусть система функций φ_1, φ_2, ..., φ_n определена на отрезке $[a, b]$ и пусть интервал (a_1, b_1) содержится в интервале (a, b).

Тогда, если Δ_n — определитель Грама для этой системы на $[a, b]$ и (φ_i, φ_j) определяется формулой

$$(\varphi_i, \varphi_j)=\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,d\sigma(x),$$

а Δ_n' — определитель Грама этой же системы на $[a_1, b_1]$, то

$$\Delta_n \geqslant \Delta_n'.$$

Это свойство верно и для определителя Грама функций многих переменных в области Q: с уменьшением области определитель Грама может только уменьшиться.

Теорема 2. *Для того чтобы конечная система функций была линейно независима, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Грама был отличен от нуля.*

Теорема 3. *Всякая конечная ортогональная система функций линейно независима.*

Теорема 3 есть очевидное следствие теоремы 2, так как определитель Грама ортогональной системы функций равен произведению квадратов норм всех функций системы, каждая из которых больше нуля.

Бесконечная последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Пусть дана система линейно независимых функций φ_1, φ_2, ..., φ_n и пусть $f(x)$ — некоторая данная функция. Рассмотрим задачу о наилучшем квадратическом приближении функции $f(x)$ с помощью линейных комбинаций функций системы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, т. е. из всех линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i$ найдем ту, которая обращает в минимум выражение

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i \right\|^2.$$

Коэффициенты наилучшей линейной комбинации находятся из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial d_k}\left(\left\| f - \sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i \right\|^2\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е.

$$\left.\begin{array}{l} d_1(\varphi_1, \varphi_1) + d_2(\varphi_2, \varphi_1) + \ldots + d_n(\varphi_n, \varphi_1) = (f, \varphi_1), \\ d_1(\varphi_1, \varphi_2) + d_2(\varphi_2, \varphi_2) + \ldots + d_n(\varphi_n, \varphi_2) = (f, \varphi_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_1(\varphi_1, \varphi_n) + d_2(\varphi_2, \varphi_n) + \ldots + d_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n). \end{array}\right\} \quad (4.33)$$

Определитель этой системы есть определитель Грама; в силу линейной независимости исходной системы он отличен от нуля и система (4.33) имеет единственное решение. Очевидно, нахождение коэффициентов $d_1, d_2, \ldots, d_n$ из системы (4.33) будет наиболее простым, если исходная система была ортогональная. Тогда система (4.33) превращается в систему

$$d_k(\varphi_k, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4.34)$$

Исходя из всякой (конечной или бесконечной) *линейно независимой* системы функций (или векторов) можно построить ортогональную систему, элементами которой являются некоторые линейные комбинации элементов исходной системы. Рассмотрим процесс построения такой системы. Он называется *процессом ортогонализации Шмидта*.

Пусть дана линейно независимая система

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n.$$

Положим

$$\omega_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{(\varphi_1, \varphi_1)^{1/2}}.$$

Пусть

$$\psi_2 = \varphi_2(x) - c_{21}\omega_1(x).$$

Коэффициент c_{21} можно подобрать так, чтобы $(\psi_2, \omega_1) = 0$, для этого положим

$$c_{21} = \frac{(\varphi_2, \omega_1)}{(\omega_1, \omega_1)} = (\varphi_2, \omega_1).$$

Выбрав так коэффициент c_{21}, положим

$$\omega_2(x) = \frac{\psi_2(x)}{(\psi_2, \psi_2)^{1/2}}.$$

Здесь $(\psi_2, \psi_2) \neq 0$, так как иначе $\psi_2(x) \equiv 0$, а это значило бы что φ_1 и φ_2 линейно зависимы.

Пусть функции $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ уже построены. Тогда положим

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \sum_{i=1}^{n-1} c_{ni}\omega_i(x),$$

где числа c_{ni} подобраны так, чтобы $\psi_n(x)$ была ортогональна ко всем функциям $\omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$. Для этого следует взять $c_{ni} = (\varphi_n, \omega_i)$. Затем полагаем $\omega_n(x) = \dfrac{\psi_n(x)}{(\psi_n, \psi_n)^{1/2}}$, где $(\psi_n, \psi_n) \neq 0$ вследствие линейной независимости функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$. Этот процесс можно продолжить неограниченно.

Построенная таким образом система $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x), \ldots$ будет *ортонормированной*.

Совершенно аналогично происходит процесс ортогонализации системы векторов.

Для системы векторов в n-мерном пространстве или функций, определенных в n точках, такая система содержит не более n элементов.

4. Коэффициенты Фурье. Замкнутость системы. Пусть

$$\omega_1(x),\ \omega_2(x),\ \ldots,\ \omega_n(x), \tag{4.35}$$

— ортонормированная система функций. И пусть для функции $f(x)$ существуют внутренние произведения с каждой функцией системы. Числа $c_i = (f, \omega_i)$ называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по системе (4.35). В частном случае, когда система (4.35) — тригонометрическая, числа c_i — хорошо известные из теории рядов Фурье коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Коэффициенты Фурье для функции являются аналогами проекций вектора на векторы ортонормированной системы векторов. Для всякой функции, имеющей все коэффициенты Фурье, можно формально построить ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x). \tag{4.36}$$

Этот ряд называется (по аналогии с соответствующим рядом по тригонометрической системе) *рядом Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x) \ldots$

Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Для всякой функции $f(x)$, для которой существуют (f, f) и все коэффициенты Фурье, имеет место *неравенство Бесселя*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leqslant (f, f), \tag{4.37}$$

откуда следует, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^2$ сходится и

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant (f, f). \tag{4.38}$$

В частном случае, когда $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = (f, f)$, неравенство (4.38) превращается в равенство. Оно называется *равенством Парсеваля.*

Пусть

$$\omega_1(x),\ \omega_2(x),\ \ldots,\ \omega_n(x),\ \ldots \qquad (4.39)$$

— ортонормированная система функции на (a, b), а $f(x)$ — функция, заданная на (a, b), для которой существует (f, f).

Рассматривая задачу наилучшей *квадратической аппроксимации* функции $f(x)$ линейными комбинациями

$$\sum_{i=1}^{n} d_i\omega_i(x),$$

мы пришли (см. п. 3 этого параграфа) для ортогональной системы $\{\omega_i(x)\}$ к выражению коэффициентов, дающих наилучшее приближение (4.34),

$$d_k = \frac{(f,\ \omega_k)}{(\omega_k,\ \omega_k)},$$

что в случае нормированной системы дает

$$d_k = (f,\ \omega_k) = c_k.$$

Отсюда следует

Теорема 4. *Из всех линейных комбинаций* $\sum_{i=1}^{n} d_i\omega_i(x)$ *наименьшее значение квадратического отклонения от функции* $f(x)$ *имеет конечная сумма Фурье*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i(x)$$

(*т. е. та линейная комбинация, у которой* $d_i = c_i$).

Ортонормированная система $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x), \ldots$ называется *замкнутой*, если выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \int_a^b f^2(x)\,d\sigma(x) \qquad (4.40)$$

для любой функции $f(x)$ из $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$. В этом случае

$$\int_a^b f^2(x)\,d\sigma(x) - \sum_{i=1}^n c_i^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что в силу равенства

$$\int_a^b f^2(x)\,d\sigma(x) - \sum_{i=1}^n c_i^2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^n c_i\omega_i(x)\right]^2 d\sigma(x)$$

означает стремление к нулю квадратического отклонения

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^n c_i\omega_i(x)\right]^2 d\sigma(x) \tag{4.41}$$

при $n \to \infty$.

Если (4.41) стремится к нулю при $n \to \infty$, то говорят, что ряд Фурье

$$\sum_{i=1}^\infty c_i\omega_i(x)$$

сходится в среднем к функции $f(x)$.

Следовательно, для любой функции $f(x)$ из $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$ ее ряд Фурье по любой *замкнутой* системе сходится к ней в среднем.

Пример 11. Тригонометрическая система (4.22) замкнута на $(0, 2\pi)$.

Пример 12. Теорема 5 (В. А. Стеклова). *Совокупность собственных функций уравнения Штурма — Лиувиля образует замкнутую систему.*

Именно в связи с этой теоремой и было введено В. А. Стекловым понятие замкнутости системы.

Из равенств Парсеваля следует, что всякая ортогональная система, замкнутая в $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$, полна и всякая полная ортогональная система в $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$ замкнута.

5. Ряды Фурье по тригонометрической системе *). Задача о представлении произвольной функции $f(x)$ тригонометрическим рядом

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{4.42}$$

возникла в середине восемнадцатого столетия в связи с задачей о колебании струны. Этой задачей занимались все крупнейшие математики того времени. Основной шаг в решении этой проблемы был сделан Фурье, который установил **), что благодаря ортогональности тригонометрической системы коэффициенты ряда (4.42) могут быть выражены в виде:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{aligned}\right\} \tag{4.43}$$

(отсюда и название *коэффициентов Фурье* в случае произвольной ортогональной системы).

Фурье сформулировал теорему о том, что произвольная (графически) функция может быть представлена рядом Фурье.

Исторически первой теоремой о сходимости рядов Фурье была

Теорема 6 (Дирихле, 1829 г.). *Всякая функция, допускающая интегрирование в любом промежутке на* $(0, 2\pi)$ *и не имеющая на нем бесконечного числа экстремумов, разлагается в ряд Фурье, сходящийся в каждой точке* x *к значению*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

*) Более подробные сведения о тригонометрических рядах Фурье см. в гл. III.

**) До Фурье это было замечено Эйлером.

Существеннейшим моментом в доказательстве Дирихле явилось представление частной суммы ряда Фурье $s_n(x)$ и остатка в виде интегралов

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)} d\alpha$$

и

$$f(x) - s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(\alpha)) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)} d\alpha,$$

и следующие соображения:

1) если $0 < c < \frac{\pi}{2}$, то при $n \to \infty$

$$\int_0^c \varphi(\beta) \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} d\beta \to \frac{\pi}{2}\varphi(0);$$

2) если $0 < b < c \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\varphi(\beta)$ монотонна, то

$$\int_b^c \varphi(\beta) \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} d\beta \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Этим же методом доказывается несколько более общая теорема.

Теорема 7. *Если $f(x)$ — функция с ограниченным изменением, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке x к значению $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Если $f(x)$, кроме того, непрерывна во всех точках некоторого интервала, то в нем ряд Фурье сходится равномерно.*

Теорема 8 (признак Лебега). *Пусть*

$$\varphi(t) = \varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

и

$$\Phi_x(h) = \int_0^h |\varphi_x(t)| \, dt.$$

Если

$$\frac{\Phi_x(h)}{h} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0$$

и

$$\int\limits_{\eta}^{\pi} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t+\eta)|}{t} dt \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to 0,$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в точке x.

Теорема 9 (Дини—Липшица). *Если $f(x)$ непрерывна и ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию*

$$\omega(\delta) \ln \frac{1}{\delta} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

то ряд Фурье $f(x)$ равномерно сходится.

Теорема 10 (Валле-Пуссена). *Если функция*

$$\chi(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t \varphi_x(t)\, dt$$

имеет ограниченное изменение в некотором интервале с левым концом $t=0$ и $\chi(t) \to 0$ при $t \to 0$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x к значению $f(x)$.

Теорема 11 (Харди). *Если*

$$f(x+h) - f(x) = o\left[\left(\ln \frac{1}{|h|}\right)^{-1}\right]$$

и коэффициенты c_n ряда суть величины порядка $O(n^{-\delta})$, где $\delta > 0$, то ряд Фурье сходится в точке x к значению $f(x)$ (о символах $o(n)$ и $O(n)$ см. гл. I, § 3, п. 8).

6. Биортогональные системы функций. *Биортогональной системой функций на (a, b)* называют систему функции, состоящую из двух последовательностей

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ \ \ \varphi_n(x),\ \ldots, \\ \psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x), \end{array}\right\} \qquad (4.44)$$

удовлетворяющих на (a, b) условию

$$(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символы Кронекера (см. гл. II, § 1, п. 2). Здесь внутреннее произведение (φ_i, ψ_j) есть либо $\int\limits_a^b \varphi_i\psi_j\,dx$, либо $\int\limits_a^b \varphi_i\psi_j\,d\sigma(x)$. В последнем случае говорят о *системе функций, биортогональных по весу* $\sigma(x)$ *или* $p(x)$, *если* $d\sigma(x) = p(x)\,dx$.

Всякой функции, для которой существуют встречающиеся далее внутренние произведения, можно сопоставить ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k\varphi_k(x), \tag{4.45}$$

где

$$A_k = (f, \psi_k),$$

и рассматривать вопрос о сходимости этого ряда и о возможности использования его отрезков для приближенного представления функции.

Пример 13. *Биортогональная система Чебышева* на $(-1, 1)$ по весу $p(x) = 1$:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_k(x) = \operatorname{sign}\frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi},\\ &\psi_k(x) = \frac{1}{2}\sum_{d/k+1}\frac{\mu(d)}{d}\,\frac{\sin\dfrac{k+1}{d}\varphi}{\sin\varphi},\\ &\text{где } x = \cos\varphi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{4.46}$$

а d в формуле (4.46) пробегает все нечетные делители $k+1$, причем $d=1$ и $d = k+1$, если оно нечетно, включаются; функция $\operatorname{sign} x$ введена в гл. I, § 2, п. 1; $\mu(d)$ есть *функция Мёбиуса*, т. е.

$\mu(1) = 1$;

$\mu(a) = 0$, если a делится на квадрат, отличный от единицы;

$\mu(a) = (-1)^r$, если a не делится на квадрат, отличный от единицы, и r есть число простых делителей числа a, отличных от 1.

Функции $\varphi_k(x)$ этой системы кусочно-постоянны, а $\psi_k(x)$ — многочлены относительно x, имеющие k простых нулей на

$(-1, +1)$. Ниже приводится несколько первых функций этой системы:

$$\varphi_0 = 1, \qquad \psi_0 = \frac{1}{2},$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } -1 < x < 0, \\ +1 & \text{для } \quad 0 < x < 1, \end{cases} \qquad \psi_1(x) = x,$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } -1 < x < -\frac{1}{2}, \\ +1 & \text{для } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{для } \quad \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \qquad \psi_2(x) = 2\left(x^2 - \frac{1}{3}\right),$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} -1 & \text{на } \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ +1 & \text{на } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\ -1 & \text{на } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ +1 & \text{на } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \end{cases} \qquad \psi_3(x) = 2x(2x^2 - 1).$$

Пример 14. *Биортогональная система Маркова* на $(-1, +1)$ по весу $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0 = 1, && \psi_0 = \frac{1}{\pi}, \\ &\varphi_k = \operatorname{sign}\cos k\varphi, && \psi_k = \frac{1}{2}\sum_d \frac{(-1)^h}{d}\cos\frac{k\varphi}{d}, \end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

где $x = \cos\varphi$, d в формуле (4.47) пробегает все нечетные делители числа k, не содержащие квадратных множителей, а h есть число простых множителей вида $4m+1$, содержащихся в d $(m \neq 0)$, (о функции $\operatorname{sign} x$ см. гл. I, § 2, п. 1).

Здесь так же, как и в системе Чебышева, $\varphi_k(x)$ — кусочно-постоянны, а $\psi_k(x)$ — многочлены от x. Ниже приводится несколько первых функций этой системы:

$$\varphi_0 = 1, \qquad \psi_0 = \frac{1}{\pi},$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -1 \text{ на } (-1,\ 0), \\ +1 \text{ на } (0,\ 1) \end{cases} \qquad \psi_1(x) = \frac{x}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} +1 \text{ на } \left(-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ -1 \text{ на } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ +1 \text{ на } \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right), \end{cases} \qquad \psi_2(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 1),$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} -1 \text{ на } \left(-1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ +1 \text{ на } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right), \\ -1 \text{ на } \left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ +1 \text{ на } \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right), \end{cases} \qquad \psi_3(x) = 2x\left(x^2 - \frac{2}{3}\right).$$

Ряды по функциям Чебышева и Маркова напоминают ряды по одним синусам или одним косинусам.

Переходя от многочленов и интервала $(-1,\ +1)$ к тригонометрическим суммам и интервалу $(-\pi,\ +\pi)$, можно объединить обе системы в одну, которая порождает ряды, соответствующие тригонометрическим рядам общего вида.

Биортогональную систему называют *системой Чебышева—Маркова относительно веса* $\sigma(x)$, если $\varphi_k(x)$ есть многочлен степени k, а

$$\psi_k(x) = \operatorname{sign} Q_k(x),$$

где $Q_k(x)$ — многочлен степени k.

Теорема 12. *Биортогональная система Чебышева—Маркова для данной функции* $\sigma(x)$ *единственна; многочлен* $Q_k(x)$, *входящий в выражение* $\psi_k(x)$, *есть тот многочлен степени* k *со старшим коэффициентом, рав-*

ным 1, *для которого*

$$\int_{-1}^{1} |Q_k(x)|\, d\sigma(x) = \min_{P_k(x)} \int_{-1}^{1} |P_k(x)|\, d\sigma(x).$$

Система многочленов $\varphi_k(x)$ после этого определяется при помощи процесса, аналогичного процессу ортогонализации Шмидта (при рассмотрении рядов по системам Чебышева — Маркова естественна метрика пространства $L^1_{\sigma(x)}$).

§ 3. Ортогональные системы многочленов

Отдельные системы ортогональных многочленов были введены Лежандром, Якоби, Чебышевым и другими авторами. Из них исторически первой была система многочленов Лежандра. Работы Чебышева заложили основу общей теории систем ортогональных многочленов.

Пусть система

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x), \tag{4.48}$$

где $P_n(x)$ многочлен n-й степени, ортогональна на (a, b) (интервал, в частности, может быть и бесконечен) в смысле

$$(P_m, P_n) = \int_a^b P_m(x) P_n(x)\, d\sigma(x), \tag{4.49}$$

где $\sigma(x)$ имеет бесконечное число точек роста (в частности $d\sigma(x) = p(x)\,dx$, где $p(x)$ интегрируема на (a, b)). Система (4.48), с точностью до постоянного множителя при многочленах, может быть получена с помощью ортогонализации (см. § 2, п. 3) из системы функций: $1, x, x^2, \ldots, x^n$, Условимся обозначать в дальнейшем многочлены ортогональной системы (4.48), определенные условием, что их старший коэффициент равен 1, через $\overline{P}_n(x)$:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{P}_0(x) = 1,\quad \overline{P}_1(x) = x + a_{10}, \\ &\ldots,\ \overline{P}_n(x) = x^n + a_{n,\,n-1}x^{n-1} + \quad\quad + a_{n,0}, \end{aligned}\right\} \tag{4.50}$$

а многочлен ортонормированной системы — через $\hat{P}_n(x)$, т. е.

$$\int_a^b \hat{P}_n^2(x)\, d\sigma(x) = 1. \tag{4,51}$$

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в разложении по многочленам $\{\hat{P}_n(x)\}$ имеют вид

$$c_n = \int_a^b f(x)\hat{P}_n(x)\,d\sigma(x).$$

В частности, если $d\sigma(x) = G(x)\,dx$, то

$$c_n = \int_a^b \varphi(x)\hat{P}_n(x)\,dx, \qquad \varphi(x) = f(x)\,G(x). \tag{4.52}$$

Заметим, что для вычисления интеграла (4.52) вовсе не надо определять значения $\hat{P}_n(x)$ на всем интервале. Обозначая

$$\varphi^{(-1)}(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi \quad \text{и при } i > s \quad \varphi^{(-i)}(x) = \int_a^x \varphi^{(-i+1)}(\xi)\,d\xi,$$

получаем интегрированием по частям

$$c_n = \varphi^{(-1)}(b)\hat{P}_n(b) - \varphi^{(-2)}(b)\hat{P}'_n(b) + \\ + (-1)^n \varphi^{(-n-1)}(b)\hat{P}_n^{(n)}(b).$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_m$ достаточно последовательным интегрированием функции $\varphi(x)$ найти значения $\varphi^{(-1)}(b), \varphi^{(-2)}(b), \ldots, \varphi^{(-m)}(b)$, и значения многочленов $\hat{P}_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ и их m производных (при $k = 0, 1, \quad m$) в точке b.

1. Нули ортогональных многочленов. Теоре а 13. *Многочлен n-й степени $P_n(x)$ ортогональной системы* (4.48) *имеет n действительных, различных между собою простых корней, причем все его корни лежат на* (a, b).

Теорема 14. *Нули многочленов $P_n(x)$ и $P_{n-1}(x)$ из системы* (4.48) *перемежаются: между любыми двумя нулями $P_n(x)$ есть нуль $P_{n-1}(x)$.*

Из теоремы 14 следует, что $P_n(x)$ и $P_{n-1}(x)$ не имеют общих нулей.

Теорема 15. *Если $\lambda(x)$ — число перемен знаков в ряду $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$, то число корней многочлена $P_n(x)$ в интервале (α, β) равно разности $\lambda(\alpha) - \lambda(\beta)$ (свойство так называемых систем Штурма).*

2. Рекуррентные соотношения для ортогональных многочленов. Пусть $\overline{P}_{n+2}(x)$, $\overline{P}_{n+1}(x)$, $\overline{P}_n(x)$ — любые три последовательных многочлена из системы (4.48), удовлетворяющие условию (4.50). В этом случае имеет место соотношение:

$$\overline{P}_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2})\overline{P}_{n+1}(x) - \lambda_{n+1}\overline{P}_n(x), \tag{4.53}$$

где параметры α_{n+2} и λ_{n+1} определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= \frac{\int\limits_a^b x\overline{P}_{n+1}^2(x)\,d\sigma(x)}{\int\limits_a^b \overline{P}_{n+1}^2(x)\,d\sigma(x)}, \\ \lambda_{n+1} &= \frac{\int\limits_a^b \overline{P}_{n+1}^2(x)\,d\sigma(x)}{\int\limits_a^b \overline{P}_n^2(x)\,d\sigma(x)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.54}$$

Очевидно, $\lambda_{n+1} > 0$.

Параметры α_{n+2}, λ_{n+1} выражаются через коэффициенты многочленов $\overline{P}_{n+2}$, $\overline{P}_{n+1}$, $\overline{P}_n$. Если

$$\overline{P}_k(x) = x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_{kj}x^j,$$

то

$$\alpha_{n+2} = a_{n+1,\,n} - a_{n+2,\,n+1},$$
$$\lambda_{n+1} = a_{n+1,\,n-1} - \alpha_{n+2}a_{n+1,\,n} - a_{n+2,\,n}.$$

Из формул (4.54) следует, что если (a, b) — конечный интервал, то для всех n

$$\left.\begin{aligned} &a < \alpha_{n+2} < b, \\ &0 < \lambda_{n+1} < c^2, \\ \text{где}\quad &c^2 = \max(|a|, |b|). \end{aligned}\right\} \tag{4.55}$$

Примеры таких рекуррентных соотношений см. в § 4, пп. 5—10.

3. Степенные моменты. Выражение ортогональных многочленов через степенные моменты. Числа

$$\mu_n = \int_a^b x^n \, d\sigma(x) \tag{4.56}$$

называются *степенными моментами веса* $\sigma(x)$.

Для системы

$$1, \; x, \; x^2, \qquad x^n, \; \ldots$$

попарные внутренние произведения выражаются через степенные моменты

$$(x^m, \; x^n) = \int_a^b x^m x^n \, d\sigma(x) = \mu_{n+m}.$$

Определитель Грама системы степеней

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & & \mu_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \mu_n & \mu_{n+1} & & \mu_{2n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.57}$$

Процесс ортогонализации системы степеней дает для многочленов $\hat{P}_n(x)$ (4.51) выражение

$$\hat{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & & \mu_n & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \mu_n & \mu_{n+1} & & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}, \tag{4.58}$$

а для многочленов $\overline{P}_n(x)$ (4.50) — выражение

$$\overline{P}_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \ldots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & & \mu_n & x \\ \cdot & & \cdot & \\ \mu_n & \ldots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}. \tag{4.59}$$

Параметры α и λ рекуррентного соотношения (4.53) также могут быть выражены через степенные моменты

$$\alpha_{n+2}=\frac{1}{\Delta_{n+1}}\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_n & \mu_{n+2}\\ \mu_1 & \mu_{n+1} & \mu_{n+3}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \mu_{n+1} & \mu_{2n+1} & \mu_{2n+3}\end{vmatrix}-\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_{n-1} & \mu_{n+1}\\ \mu_1 & \mu_n & \mu_{n+2}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \mu_n & \mu_{2n-1} & \mu_{2n+1}\end{vmatrix}, \qquad (4.60)$$

где $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$

$$\alpha_{-1}=\frac{\mu_1}{\mu_0},\quad \lambda_{n+1}=\frac{\Delta_{n+1}\,\Delta_{n-1}}{\Delta_n^2}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

а $\Delta_{-1}=1$.

4. Связь ортогональных многочленов с цепными дробями. Дробь

$$\frac{\overline{P}_n(t)-\overline{P}_n(x)}{t-x}$$

есть симметричный многочлен степени $n-1$ относительно t и x. Поэтому функция

$$R_{n-1}(x)=\int_a^b\frac{\overline{P}_n(t)-\overline{P}_n(x)}{t-x}\,d\sigma(t) \qquad (4.61)$$

есть многочлен степени $n-1$ относительно x.

Многочлены $R_{n+1}(x)$, $R_n(x)$ и $R_{n-1}(x)$ удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению (4.53), что и многочлены $\overline{P}_{n+2}(x)$, $\overline{P}_{n+1}(x)$, $\overline{P}_n(x)$. Этот факт указывает (см. гл. V), что $R_{n-1}(x)$ и $\overline{P}_n(x)$ являются соответственно числителем и знаменателем подходящей дроби n-го порядка цепной дроби типа Чебышева:

$$\frac{\lambda_0}{x-\alpha_1}+\frac{\lambda_1}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{\lambda_n}{x-\alpha_{n+1}}. \qquad (4.62)$$

Многочлены $R_{n-1}(x)$ называются *многочленами 2-го рода относительно веса* $\sigma(x)$. Они являются знаменателями цепной дроби

$$\frac{\lambda_1}{x-\alpha_2}+\frac{\lambda_2}{x-\alpha_3}+\quad+\frac{\lambda_n}{x-\alpha_{n+1}}+\ldots \tag{4.63}$$

и ортогональны относительно некоторого другого веса.

Если интервал (a, b) конечен, то последовательность $\frac{R_{n-1}(x)}{P_n(x)}$ подходящих дробей цепной дроби (4.62) сходится для всех значений x, лежащих вне интервала (a, b), к величине интеграла

$$\int_a^b \frac{d\sigma(t)}{x-t}. \tag{4.64}$$

В случае, когда интервал (a, b) бесконечен, цепная дробь (4.62) не всегда сходится. Вопрос о сходимости ее связан с определенностью соответствующей проблемы моментов.

Независимо от сходимости цепная дробь (4.62) связана с интегралом (4.64) следующим свойством: разложение подходящей дроби $\frac{R_{n-1}(x)}{P_n(x)}$ цепной дроби (4.62) в ряд по отрицательным степеням x совпадает до членов порядка $\frac{1}{x^{2n}}$ (включительно) с рядом

$$\frac{\mu_0}{x}+\frac{\mu_1}{x^2}+\frac{\mu_2}{x^3}+\quad+\frac{\mu_{2n-1}}{x^{2n}}+\frac{\mu_{2n}}{x^{2n+1}}+ \tag{4.65}$$

который может быть получен, если в интеграле (4.64) функцию $\frac{1}{x-t}$ разложить в ряд по степеням $\frac{1}{x}$ и формально проинтегрировать почленно (при этом сходимость ряда (4.65) несущественна).

Цепная дробь типа Чебышева, обладающая указанным свойством, называется *присоединенной* (assoziierte, Perron [8]) для ряда (4.65).

В случае, когда $\sigma(x)\equiv\text{const}$, для $x<0$ цепная дробь (4.62) может быть преобразована в *цепную дробь типа Стилтьеса*

$$\frac{1}{a_1x}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3x}+\frac{1}{a_4}+ \tag{4.66}$$

так, что n-я подходящая дробь дроби (4.62) совпадает с $2n$-й подходящей дробью цепной дроби (4.66). В силу этого разложение в ряд по отрицательным степеням x $2n$-й подходящей дроби цепной дроби (4.66) совпадает с рядом (4.65) до членов $\frac{1}{x^{2n}}$ включительно. Дробь типа Стилтьеса, обладающая этим свойством по отношению к ряду (4.65), называется *соответствующей ему* (correspondirende, Perron [8]). Из теории цепных дробей известно, что всякая цепная дробь типа Стилтьеса (с $a_\nu \neq 0$) обладает соответствующим рядом, и всякая цепная дробь типа Чебышева обладает присоединенным рядом.

Большое значение для анализа имеет обратная задача: превращение наперед заданного ряда по отрицательным степеням x в соответствующую или присоединенную цепные дроби, дающие рациональные приближения для функции, заданной рядом.

Не всякий наперед заданный ряд обладает соответствующей или присоединенной ему цепной дробью. Ряд, обладающий этим свойством, называется *семинормальным*.

Теорема 16. *Ряд*

$$\frac{c_0}{x}+\frac{c_1}{x^2}+\ldots+\frac{c_n}{x^{n+1}}+\ldots$$

тогда и только тогда семинормален, когда отличны от нуля все определители:

$$\varphi_n=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \psi_n=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-3} \end{vmatrix}.$$

Тогда коэффициенты цепной дроби (4.66), *соответствующей этому ряду, выражаются через* φ_n *и* ψ_n *следующим образом*:

$$a_1=\varphi_1,\quad a_{2\nu}=-\frac{\psi_{\nu+1}\varphi_{\nu-1}}{\varphi_\nu\psi_\nu},\quad a_{2\nu+1}=-\frac{\psi_{\nu+1}\varphi_\nu}{\varphi_{\nu+1}\psi_\nu},$$

где $\varphi_0=1$ *и* $\psi_1=1$.

Соответствующая ряду дробь (4.66) может быть сжатием (см. гл. V, § 1, п. 3) превращена в дробь присоединенную.

5. Обращение ортогональных разложений в последовательность аппроксимирующих дробей. Подобно обращению ряда

$$\frac{c_0}{x}+\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_2}{x^3}+\quad+\frac{c_n}{x^{n+1}}+$$

в цепную дробь

$$\frac{1}{a_1x}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3x}+\ldots,$$

можно поставить задачу обращения ряда

$$R(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\omega_k(x), \tag{4.67}$$

где $\{\omega_k(x)\}$ — система функций, ортогональных с некоторым весом на (a, b), в последовательность рациональных дробей вида

$$\frac{P_n(x)}{q_n(x)}=\frac{\sum\limits_{l=0}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}a_l\omega_l(x)}{\sum\limits_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}b_l\omega_l(x)}. \tag{4.68}$$

При этом, по аналогии с рассмотренным обращением степенных рядов в цепные дроби, числа a_l и b_l подбираются так, чтобы первые $n+1$ членов разложения дроби (4.68) по ортогональной системе $\{\omega_l(x)\}$ совпадали с таковыми у рассматриваемого ряда (4.67). Дробь (4.68) в этом случае также будем называть n-й *подходящей дробью.*

Задача отыскания такой подходящей дроби, вообще говоря, неразрешима. Однако для некоторых систем, а именно, для систем, удовлетворяющих соотношению

$$\omega_k(x)\,\omega_1(x)=A_k\omega_{k+1}(x)+B_k\omega_k(x)+C_k\omega_{k-1}(x), \tag{4.69}$$

задача имеет решение. Соотношению (4.69) удовлетворяют многие ортогональные системы, в частности, все ортогональные системы многочленов, система тригонометрических функций $\{\cos nx\}$, функции Бесселя $\{J_n(x)\}$ и др.

Формальный процесс обращения ряда (4.67) в дробь (4.68) может быть для этих систем осуществлен следующим образом.

Дробь (4.68) ищется в виде n-й подходящей дроби цепной дроби вида

$$\frac{\alpha_0}{1} + \frac{\omega_1(x)+\alpha_1}{\beta_1\omega_1(x)+\gamma_1} + \frac{\omega_1(x)+\alpha_2}{\gamma_2} + \frac{\omega_1(x)+\alpha_3}{\beta_2\omega_1(x)+\gamma_3} + \tag{4.70}$$

Тогда требование соответствия ряда (4.67) и дроби (4.68) можно записать в виде

$$P_n(x) - q_n(x)\sum_{k=0}^{\infty} c_k\omega_k(x) = \\ = d_{n+1}^{(n)}\omega_{n+1}(x) + d_{n+2}^{(n)}\omega_{n+2}(x) + \tag{4.71}$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых функциях $\omega_0(x), \ldots, \omega_n(x)$ в соотношении (4.71) приводит к следующим выражениям для коэффициентов α_i, β_i, γ_i $(i=1, \ldots, n)$ цепной дроби (4.70):

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = B_1, \quad \gamma_n = \frac{d_{n-1}^{(n-2)}C_{n-1}}{d_{n-2}^{(n-3)}}, \\ &\beta_n = \frac{d_{n-1}^{(n-2)}B_{n-1} + d_n^{(n-2)}C_n + \gamma_n d_{n-1}^{(n-3)}}{d_{n-1}^{(n-2)}}, \\ &\alpha_n = -\frac{d_{n+1}^{(n-2)}C_{n+1} + d_n^{(n-2)}B_n + d_{n-1}^{(n-2)}A_{n-1} + \beta_n d_n^{(n-2)} + \gamma_n d_n^{(n-3)}}{d_n^{(n-1)}}, \end{aligned}\right\} \tag{4.72}$$

с помощью которых $P_n(x)$ и $q_n(x)$ находятся по рекуррентным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} P_n(x) &= \alpha_n P_{n-1}(x) + [\omega_1(x) + \beta_n] P_{n-2}(x) + \gamma_n P_{n-3}(x), \\ q_n(x) &= \alpha_n q_{n-1}(x) + [\omega_1(x) + \beta_n] q_{n-2}(x) + \gamma_n q_{n-3}(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.73}$$

где положено

$$q_{-2} = 0, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad q_1(x) = 1,$$
$$P_{-2} = 0, \quad P_{-1} = C_1, \quad P_0 = C_0, \quad P_1(x) = C_0 + C_1\omega_1(x)$$

(здесь A_n, B_n, C_n — коэффициенты соотношения (4.69)).

Для получения достаточно быстро сходящихся рациональных аппроксимаций указанным способом часто оказывается эффективным применение разложений по ортогональной системе многочленов Чебышева 1-го рода (см. § 4, п. 7).

6. Ортогональные многочлены и квадратурные формулы гауссовского типа. Формула для приближенного вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\, d\sigma(x) \approx \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} f\left(x_i^{(n)}\right) \tag{4.74}$$

называется *квадратурной формулой гауссовского типа*, если узлы $x_i^{(n)}$ $(i=1, \ldots, n)$ и коэффициенты $A_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ выбраны так, что формула (4.74) является точной, когда $f(x)$ — произвольный многочлен степени, не превосходящей $2n-1$.

Теорема 17. *Если* (4.74) — *квадратурная формула гауссовского типа, точная для многочленов степени, не превосходящей* $2n-1$, *то узлы ее*

$$x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_n^{(n)}$$

суть n корней многочлена $P_n(x)$ из системы многочленов, ортогональных на (a, b) по весу $\sigma(x)$, а коэффициенты $A_i^{(n)}$ суть коэффициенты разложения дроби $\frac{R_{n-1}(x)}{\overline{P}_n(x)}$ n-й подходящей цепной дроби (4.62) *в сумму простых дробей*

$$\frac{R_{n-1}(x)}{\overline{P}_n(x)} = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} \frac{1}{x - x_i^{(n)}},$$

т. е.

$$A_i^{(n)} = \frac{R_{n-1}\left(x_i^{(n)}\right)}{\overline{P}_n'\left(x_i^{(n)}\right)}. \tag{4.75}$$

Иначе, формула (4.75) может быть записана в виде

$$A_i^{(n)} = \int_a^b \frac{\overline{P}_n(t)\, d\sigma(t)}{\left(t - x_i^{(n)}\right) \overline{P}_n'(t)}.$$

В частном случае, когда $d\sigma(x) = dx$ и $[a, b] = [0, 1]$, формула (4.74) есть обычная квадратурная формула Гаусса, узлы которой — корни многочлена Лежандра степени n.

7. Замкнутость ортогональной системы многочленов. Для замкнутости системы многочленов $\{P_n(x)\}$, ортогональных на (a, b) по весу $\sigma(x)$ в пространстве $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы проблема моментов для последовательности моментов веса $\sigma(x)$ была определена или $\sigma(x)$ была бы ее экстремальным решением (см. [7]).

Проблема моментов для конечного отрезка $[a, b]$ всегда определена, поэтому ортогональные системы многочленов по любому весу на конечном отрезке замкнуты. В частности, замкнуты системы многочленов Лежандра, Чебышева, Якоби (см. § 4).

Проблемы моментов для веса Лагерра (см. § 4, п. 9) на $(0, +\infty)$ и веса Эрмита (см. § 4, п. 4) на $(-\infty, +\infty)$ определены, эти системы многочленов замкнуты.

Таким образом, ряды Фурье по ортогональным многочленам функции $f(x)$ из $L^2_{\sigma(x)}$, в случае всех классических весов, сходятся в среднем к этой функции.

Для рассмотрения сходимости рядов по ортогональным многочленам $\{P_n(x)\}$ в каждой точке и равномерной сходимости необходимы асимптотические оценки $|P_n(x)|$ при $n \to \infty$.

8. Формула Кристоффеля. Сходимость рядов Фурье по ортогональным многочленам. Пусть $\{\hat{P}_n(x)\}$ — ортонормированная система многочленов по весу $\sigma(x)$ на (a, b), а $f(x)$ — произвольная функция из множества $L^2_{\sigma(x)}(a, b)$.

Обозначим через s_n n-ю частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\hat{P}_n(x)\}$:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \hat{P}_k(x). \tag{4.76}$$

Если воспользоваться выражением коэффициентов Фурье, то $s_n(x)$ может быть представлена в виде

$$s_n(x) = \int_a^b f(t) \left(\sum_{k=0}^{n} \hat{P}_k(t) \hat{P}_k(x) \right) d\sigma(t). \tag{4.77}$$

Выражение

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{P}_k(t) \hat{P}_k(x) \tag{4.78}$$

называется *ядром интеграла* (4.77). Для ядра $K_n(t, x)$ имеет место следующая формула:

$$K_n(t, x) = \sqrt{\lambda_{n+1}} \frac{\hat{P}_{n+1}(t)\, \hat{P}_n(x) - \hat{P}_{n+1}(x)\, \hat{P}_n(t)}{t-x}, \qquad (4.79)$$

где λ_{n+1} определяется формулой (4.54). Формула (4.79), полученная Кристоффелем для случая $a = -1$, $b = +1$, $d\sigma(x) = dx$ и обобщенная Дарбу на случай произвольного веса, называется *формулой Кристоффеля — Дарбу*.

Из формулы (4.77) и соотношения

$$\int_a^b K_n(t, x)\, d\sigma(x) = 1$$

вытекает формула для остатка ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\hat{P}_n(x)\}$:

$$s_n(x) - f(x) =$$
$$= \sqrt{\lambda_{n+1}} \int_a^b \varphi_x(t)\, [\hat{P}_{n+1}(t)\, \hat{P}_n(x) - \hat{P}_{n+1}(x)\, \hat{P}_n(t)]\, d\sigma(t), \qquad (4.80)$$

где

$$\varphi_x(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t-x}.$$

Из формулы (4.80) получаются две следующие теоремы о сходимости ряда Фурье функции $f(x)$.

Теорема 18. *Если все многочлены $P_n(x)$ в точке x ограничены и функция $\varphi_x(t)$ входит в $L^2_{\sigma(t)}(a, b)$, то в точке x ряд Фурье*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \hat{P}_k(x)$$

сходится и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \hat{P}_k(x).$$

Определение. Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ ... называется *равномерно ограниченной*, если существует такая постоянная M, что $|\varphi_n(x)| < M$ для всех функций системы.

Теорема 19. *Если многочлены $P_n(x)$ равномерно ограничены на (a, b), то для любой функции $f(x)$, интегри-*

руемой на (a, b) по весу $\sigma(x)$, ее ряд Фурье по системе $\{P_n(x)\}$ сходится во всякой точке x, в которой существует интеграл

$$\int_a^b \varphi_x(t)\, d\sigma(t),$$

к значению $f(x)$.

Следующие теоремы устанавливают сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе многочленов $\{P_n(x)\}$ вне зависимости от свойств этой системы, по структурным свойствам функции $f(x)$.

Теорема 20. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$:*

$$|f(x_2) - f(x_1)| < M\,|x_2 - x_1|^\alpha,$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ по системе ортогональных многочленов $\{P_n(x)\}$ сходится почти всюду на (a, b).

Определение. Функцию $L_n(x) = \int_a^b |K_n(t, x)|\, d\sigma(t)$ называют *функцией Лебега ортонормальной системы* $\{\hat{P}_n(x)\}$.

Теорема 21. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ее наилучшее приближение многочленами степени n*

$$E_n(f) = \inf_{Q_n(x)} \max_{(a,\, b)} |f(x) - Q_n(x)|$$

удовлетворяет соотношению

$$L_n(x_0) \cdot E_n(f) \to 0 \qquad при\ n \to \infty.$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{\hat{P}_n(x)\}$ сходится в точке $x = x_0$ к значению $f(x_0)$.

§ 4. Классические системы ортогональных многочленов

1. Дифференциальное уравнение Пирсона. Уравнение

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2} \left(= \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right) \tag{4.81}$$

называется *уравнением Пирсона*. Решения уравнения называются *функциями Пирсона*. Уравнение (4.81) было введено Пирсоном для представления эмпирических законов распределения. При $\alpha_1 = -1$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ решением этого уравнения является классическая функция $e^{-\frac{x^2}{2}}$ — *плотность нормального закона распределения.*

Веса всех важнейших систем ортогональных многочленов являются функциями Пирсона.

Вес Якоби

$$\rho(x) = (1 - x)^{\lambda} (1 + x)^{\mu}, \tag{4.82}$$

где $\lambda > -1$, $\mu > -1$. Вес Якоби $\rho(x)$ определен на $[-1, 1]$ и имеет на нем все моменты. Уравнение Пирсона веса Якоби

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{(\mu - \lambda) - (\mu + \lambda) x}{1 - x^2}. \tag{4.83}$$

Вес Чебышева — частный случай веса Якоби, соответствующий $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\mu = -\frac{1}{2}$,

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{4.84}$$

Дифференциальное уравнение Пирсона для веса Чебышева

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{x}{1 - x^2}. \tag{4.85}$$

Вес Лежандра $\rho(x) \equiv 1$ — частный случай веса Якоби, соответствующий $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Дифференциальное уравнение Пирсона

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{1 - x^2}. \tag{4.86}$$

К перечисленным функциям сводится с помощью линейной замены независимой переменной любая функция Пирсона, имеющая все моменты, для которой в уравнении (4.81) знаменатель $\beta(x)$ имеет действительные различные корни.

В случае, когда знаменатель $\beta(x)$ имеет кратные или комплексные корни, функции Пирсона не могут быть весами ортогональной системы многочленов, так как не имеют всех моментов на интервале, на котором они определены.

Вес Чебышева — Лагерра

$$\rho(x) = x^{\lambda} e^{-\mu x}, \quad \text{где} \quad \lambda > -1, \ \mu > 0, \tag{4.87}$$

определен на $(0, +\infty)$. Уравнение Пирсона веса Чебышева — Лагерра

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\lambda - \mu x}{x}. \tag{4.88}$$

К этим функциям сводится с помощью линейной замены независимого переменного всякая функция Пирсона, имеющая все моменты на $(0, +\infty)$, для которой в уравнении (4.81) знаменатель $\rho(x)$ есть многочлен первой степени ($\beta_2 = 0$).

Вес Чебышева — Эрмита

$$\rho(x) = e^{-x^2} \tag{4.89}$$

определен на $(-\infty, +\infty)$. Уравнение Пирсона

$$\frac{\rho'}{\rho} = -2x.$$

К функциям Чебышева — Эрмита сводится любая функция Пирсона, имеющая на $(-\infty, +\infty)$ все моменты, для которой в уравнении (4.81) $\beta(x) = \text{const}$ ($\beta_1 = \beta_2 = 0$).

Таким образом, все функции Пирсона, могущие служить весами ортогональной системы многочленов, сводятся к одному из перечисленных основных весов.

2. Дифференциальное уравнение для соответствующих классов ортогональных многочленов. Многочлены ортогональных систем, весами которых являются функции Пирсона, удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка, к которым часто приводят различные физические задачи, что и обусловливает важность их для приложений.

Если вес $\rho(x)$ ортогональной системы многочленов удовлетворяет уравнению

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2},$$

то многочлен n-й степени этой системы удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\beta(x) y'' + [\alpha(x) + \beta'(x)] y' - \gamma_n y = 0, \tag{4.90}$$

где $\gamma_n = n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]$, а $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ см. (4.81).

Пример 15. Для веса Чебышева:

$$\alpha(x) = x, \qquad \alpha_1 = 1,$$
$$\beta(x) = 1 - x^2, \quad \beta_2 = -1.$$

Уравнение для многочленов Чебышева имеет вид

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

3. Выражение через вес многочлена n-й степени из ортогональной системы многочленов. Рассмотрим ортогональную систему многочленов с весом Пирсона $\rho(x)$ из (4.81). Пусть $P_n(x)$ — многочлен n-й степени из системы многочленов, ортогональных по весу $\rho(x)$. Многочлен $P_n(x)$ представляется в виде

$$P_n(x) = A_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{\rho(x) \beta^n(x)\}. \tag{4.91}$$

Эта *формула* была получена *Родригом* для многочленов Лежандра (в 1814 г.), подобные формулы получены и для других многочленов. Формула Родрига в общем виде (4.91) впервые опубликована в [5].

Если $A_n = 1$, то коэффициент у $P_n(x)$ при старшем члене

$$\tilde{a}_n = \prod_{k=n+1}^{2n} (\alpha_1 + k\beta_2), \tag{4.92}$$

а при x^{n-1}

$$\tilde{b}_n = \frac{\alpha_0 + n\beta_1}{\alpha_1 + 2n\beta_2} n\tilde{a}_n. \tag{4.93}$$

Коэффициент при старшем члене у нормированного многочлена

$$a_n^0 = \sqrt{\frac{(-1)^n \tilde{a}_n}{n! \int\limits_a^b \rho(x) \beta^n(x)\, dx}}. \tag{4.94}$$

4. Производящая функция ортогональной системы многочленов с весом Пирсона. Рассмотрим ортогональную систему многочленов $\{P_n(x)\}$, где $P_n(x)$ определен по формуле (4.91) с константой $A_n = 1$.

Производящей функцией системы $\{P_n(x)\}$ называется функция $\psi(z, w)$ двух комплексных переменных z и w такая, что

$$\psi(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n'(z)}{n!} w^n. \tag{4.95}$$

Теорема 22. *Для любой ортогональной системы многочленов $\{P_n(x)\}$ с весом $\rho(x)$, удовлетворяющим условию* (4.81), *существует производящая функция* (4.95), *которая определяется формулой*

$$\psi(z, w) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{\rho(\xi_w)}{1 - w\beta'(\xi_w)}, \tag{4.96}$$

где ξ_w — тот корень квадратного уравнения

$$\xi - z - w\beta(\xi) = 0, \tag{4.97}$$

который при малых w близок к z.

Пример 16. Найдем производящую функцию для многочленов Лежандра.

Уравнение (4.97) в этом случае имеет вид

$$w\xi^2 + \xi - (z + w) = 0,$$

причем

$$\xi_w = \frac{1}{2w}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4wz + 4w^2}\right)$$

выбирается так, чтобы ξ_w при малых w было близко к z, т. е.

$$\xi_w = \frac{1}{2w}\left(-1 + \sqrt{1 + 4wz + 4w^2}\right).$$

Применяя формулу (4.96) и полагая $\rho(x) \equiv 1$, получаем

$$\psi(z, w) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4wz + 4w^2}}. \tag{4.98}$$

Производные ортогональных многочленов с весом Пирсона также являются ортогональными многочленами относительно веса

$$\rho_1(x) = \exp\left\{\int \frac{\alpha(x) + \beta'(x)}{\beta(x)} dx\right\}.$$

5. Многочлены Лежандра. Исторически первой системой ортогональных многочленов была система многочленов с весом $\rho(x) \equiv 1$ на $[-1, +1]$, введенная Лежандром в 1785 г.

Введем обозначения: $L_n(x)$ — многочлен Лежандра, в котором не фиксирован множитель, с точностью до которого определяется система ортогональных многочленов, $\overline{L}_n(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным 1, и $\hat{L}_n(x)$ — нормированный многочлен Лежандра.

Формула Родрига:

$$L_n(x) = A_n \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}. \tag{4.99}$$

Из формул (4.92) — (4.94) следуют выражения для $\overline{L}_n(x)$ и $\hat{L}_n(x)$:

$$\overline{L}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \tag{4.100}$$

$$\hat{L}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{4.101}$$

Явное выражение многочленов Лежандра:

$$L_n(x) = A_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} C_n^k x^{n-2k}. \tag{4.102}$$

Из формулы (4.102) следует, что при n четном $L_n(x)$ — четная относительно x функция, при n нечетном — нечетная.

Рекуррентная формула. Для многочленов Лежандра в формуле (4.54)

$$\alpha_{n+2} = 0, \quad \lambda_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)},$$

т. е.

$$\overline{L}_{n+2}(x) = x\overline{L}_{n+1}(x) - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \overline{L}_n(x). \tag{4.103}$$

Очевидно, $\overline{L}_0(x) = 1$, $\overline{L}_1(x) = x$; из формулы (4.103) далее получаются:

$$\overline{L}_2(x) = \frac{1}{3}(3x^2-1),$$

$$\overline{L}_3(x) = \frac{1}{5}(5x^3-3x),$$

$$\overline{L}_4(x) = \frac{1}{35}(35x^4-30x^2+3),$$

$$\overline{L}_5(x) = \frac{1}{315}(315x^5-350x^3+75x) \quad \text{и т. д.}$$

Цепная дробь (4.62) для многочлена Лежандра имеет вид

$$\frac{2}{x}-\frac{\frac{1}{3}}{x}-\frac{\frac{4}{15}}{x}-\frac{\frac{9}{35}}{x}-\ldots-\frac{\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}}{x}-\ldots \tag{4.104}$$

Знаменатель n-й подходящей дроби (4.104) есть $L_n(x)$.

Цепная дробь (4.104) сходится к $\ln\frac{x+1}{x-1}$ во всякой точке x, лежащей вне $[-1, +1]$.

Производящая функция. Пусть $H(x, w)$ — производящая функция многочленов Лежандра (4.95); тогда формула (4.98) дает

$$H(x, w)=\frac{1}{\sqrt{1+4wx+4w^2}}, \tag{4.105}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{1+4wx+4w^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{L}_n(x)}{n!}w^n,$$

где

$$\tilde{L}_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

или

$$H(x, w)=1-2xw+2(3x^2-1)w^2-4(5x^3-3x)w^3+$$
$$+2(35x^4-30x^2+3)w^4+\ldots$$

Производящую функцию для многочленов Лежандра часто записывают в виде

$$H(x, t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, \quad \text{где} \quad t=-2w,$$

тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}l_k(x)t^k,$$

где $l_k(x)$ определяется из формулы (4.99) при $A_k=\frac{1}{(2k)!!}$.

Многочлены $\overline{L}_n(x)$ и $\hat{L}_n(x)$ выражаются через многочлен $l_n(x)$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \overline{L}_n(x) &= \frac{n!}{(2n-1)!!}\, l_n(x), \\ \hat{L}_n(x) &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, l_n(x). \end{aligned}\right\} \tag{4.106}$$

Для многочленов $l_n(x)$ имеет место рекуррентная формула

$$(n+2)\, l_{n+2}(x) = (2n+3)\, x l_{n+1}(x) - (n+1)\, l_n(x). \tag{4.107}$$

Дифференциальное уравнение для многочленов Лежандра имеет вид

$$(1-x^2)\, y'' - 2xy' + n(n+1)\, y = 0.$$

Интегральное представление многочленов Лежандра. Многочлен

$$l_n(x) = \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

может быть представлен в виде

$$l_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi. \tag{4.108}$$

Интеграл в формуле (4.108) называется *интегралом Лапласа* (интеграл имеет действительные значения для действительных x, несмотря на то, что подынтегральная функция комплексная). На рассматриваемом отрезке ортогональности $[-1, +1]$ многочлены $l_n(x)$ равномерно ограничены.

Из формулы (4.108) следует, что

$$|l_n(x)| \leqslant 1 \tag{4.109}$$

для

$$|x| \leqslant 1.$$

Для точек, лежащих внутри интервала $(-1, +1)$, имеет место более точная оценка

$$|l_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.110}$$

Неравенство Турана

$$l_n^2(x) - l_{n-1}(x)\, l_{n+1}(x) \geqslant 0$$

при $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Разложение некоторых функций по многочленам Лежандра:

$$x^{2n}=\frac{1}{2n+1}l_0(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(4k+1)\frac{2n(2n-2)\ldots(2n-2k+2)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k+1)}l_{2k}(x),$$

$$x^{2n+1}=\frac{3}{2n+3}l_1(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(4k+3)\frac{2n(2n-2)\ldots(2n-2k+2)}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2k+3)}l_{2k+1}(x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(4k+1)\left\{\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\right\}^2 l_{2k}(x),\quad |x|<1,$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(4k+3)\frac{(2k-1)!!(2k+1)!!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}l_{2k+1}(x),\quad |x|<1,$$

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(4k+1)\frac{(2k-3)!!(2k-1)!!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}l_{2k}(x)\right\},$$
$$|x|<1,$$

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\right)^2[l_{2k+1}(x)-l_{2k-1}(x)],\quad |x|<1.$$

Сходимость рядов Фурье по многочленам Лежандра.

Теорема 23. *Если $f(x)$ имеет на $[-1, +1]$ непрерывную вторую производную, то она разлагается в равномерно сходящийся ряд по многочленам Лежандра на $[-1, +1]$.*

В силу формул (4.106) и (4.109) для нормированных многочленов Лежандра имеет место оценка

$$|\hat{L}_n(x)|<\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\quad \text{для}\quad |x|\leqslant 1. \tag{4.111}$$

Формула (4.111) и соответствующая оценка ядра $K_n(t, x)$ для многочленов $\hat{L}_n(x)$ дают оценку для функции Лебега (см. § 3, п. 8)

$$L_n(x) \leqslant (n+1)^2. \tag{4.112}$$

Из теоремы 21 (см. § 3, п. 8) и формулы (4.112) следует

Теорема 24. *Всякая непрерывная функция $f(x)$, наилучшее приближение которой удовлетворяет условию*

$$\lim_{n \to \infty} n^2 E_n(f) = 0, \tag{4.113}$$

разлагается в равномерно сходящийся на $[-1, +1]$ ряд по многочленам Лежандра.

Из теоремы 23 и формул (4.106) и (4.110) следует

Теорема 25. *Функция $f(x)$, квадрат которой интегрируем на $[-1, 1]$, разлагается в сходящийся к ней ряд Фурье по многочленам Лежандра в каждой точке x, для которой существует интеграл*

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right)^2 dt. \tag{4.114}$$

Замечание. Условие (4.114) выполняется, в частности, если существует конечная производная $f'(x)$ в точке x.

Теорема 26. *Пусть $f(x)$ — функция, квадрат которой интегрируем на $[-1, 1]$, и пусть в точке x существуют левый и правый пределы функции $f(x)$: $f(x-0)$ и $f(x+0)$. Тогда, если интегралы*

$$\int_{-1}^{x} \left(\frac{f(t)-f(x-0)}{t-x}\right)^2 dt \quad и \quad \int_{x}^{1} \left(\frac{f(t)-f(x+0)}{t-x}\right)^2 dt$$

конечны, то ряд Фурье по многочленам Лежандра сходится в точке x к $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Теорема 27. *Если $f(x)$ на $[-1, +1]$ удовлетворяет условию Дини — Липшица —*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) \ln(\delta) = 0$$

$\left(\text{где } \omega(\delta) = \sup\limits_{|x_1-x_2| < \delta} \{|f(x_1) - f(x_2)|\}\right.$ — модуль непрерывности функции $\left.f(x)\right)$, то во всех точках интервала она

разлагается в ряд Фурье по многочленам Лежандра, причем сходимость этого ряда равномерна на всяком сегменте $[-1+h,\ 1-h]$ $(h>0)$.

6. Многочлены Якоби. *Многочленами Якоби* называют многочлены, ортогональные на $[-1, +1]$ по весу

$$\rho(x)=(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu}, \tag{4.115}$$

где $\lambda>-1$, $\mu>-1$. Вес (4.115) есть вес Пирсона (см. § 4, п. 1). Высказанное выше определение задает многочлены Якоби с точностью до постоянного множителя. Если этот множитель не фиксирован, будем многочлены Якоби обозначать $J_n^{(\lambda,\,\mu)}(x)$, если этот многочлен имеет коэффициент при x^n, равный единице, то — через $\bar{J}_n^{(\lambda,\,\mu)}(x)$, если многочлен нормирован, то — через $\hat{J}_n^{(\lambda,\,\mu)}(x)$.

Многочлены Лежандра (см. п. 5) являются частным случаем многочленов Якоби, соответственно при $\lambda=\mu=0$. Далее (см. пп. 7, 8) специально рассматриваются случаи $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ и $\lambda=\mu=-\frac{1}{2}$. Многочлены, соответствующие этим значениям λ и μ, называются *многочленами Чебышева* (2-*го* и 1-*го рода* соответственно).

Вообще, случай $\lambda=\mu$ имеет некоторые особенности. Многочлены Якоби при $\lambda=\mu$ называют *ультрасферическими*.

Формула Родрига. Формула (4.91) для многочленов Якоби дает

$$J_n^{(\lambda,\,\mu)}(x)=A_n(1-x)^{-\lambda}(1+x)^{-\mu}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\lambda+n}(1+x)^{\mu+n}\right], \tag{4.116}$$

причем для $\bar{J}_n^{(\lambda,\,\mu)}(x)$ имеем

$$A_n=(-1)^n\frac{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2n+1)}, \tag{4.117}$$

а для $\hat{J}_n^{(\lambda,\,\mu)}(x)$

$$A_n=(-1)^n\sqrt{2^{-(\lambda+\mu+2n+1)}\frac{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)\,\Gamma(\lambda+\mu+2n+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)\,\Gamma(\mu+n+1)\,n!}}. \tag{4.118}$$

Эти формулы годны для $n > 0$. Они верны и при $n = 0$, если только $\lambda + \mu + 1 \neq 0$; если же $\lambda + \mu + 1 = 0$, то при $n = 0$ они теряют смысл, однако ясно, что

$$\bar{J}_0^{(\lambda,\mu)}(x) = 1.$$

Явное выражение. Если в формуле Родрига (4.116) $A_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$, то соответствующий многочлен Якоби будем обозначать $j_n^{(\lambda,\mu)}(x)$. Часто удобно рассматривать именно этот многочлен Якоби. Для него имеет место формула

$$j_n^{(\lambda,\mu)}(x) = \\ = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\Gamma(\lambda+n+1)\,\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\lambda+n-k+1)\,\Gamma(\mu+k+1)} (x-1)^{n-k}(x+1)^k. \tag{4.119}$$

Рекуррентная формула. Общая рекуррентная формула (4.54) для трех последовательных многочленов из системы ортогональных многочленов в случае системы многочленов Якоби имеет вид

$$\bar{J}_{n+2}^{(\lambda,\mu)}(x) = (x - \alpha_{n+2})\,\bar{J}_{n+1}^{(\lambda,\mu)}(x) - \lambda_{n+1}\bar{J}_n^{(\lambda,\mu)}(x), \tag{4.120}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= \frac{\mu^2-\lambda^2}{(\lambda+\mu+2n+2)(\lambda+\mu+2n+4)}, \\ \lambda_{n+1} &= \frac{(\lambda+n+1)(\mu+n+1)(\lambda+\mu+n+1)}{(\lambda+\mu+2n+1)(\lambda+\mu+2n+2)^2(\lambda+\mu+2n+3)}\,4(n+1). \end{aligned}\right\} \tag{4.121}$$

Так как

$$\bar{J}_0^{(\lambda,\mu)} = 1 \quad \text{и} \quad \bar{J}_1^{(\lambda,\mu)} = x - \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu+2},$$

то из формулы (4.120) можно последовательно получить все многочлены Якоби. Однако эти выражения очень громоздки, например,

$$\bar{J}_2^{(\lambda,\mu)}(x) = x^2 + 2\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu+4}x + \frac{(\lambda-\mu)^2+(\lambda+\mu)-4}{(\lambda+\mu+3)(\lambda+\mu+4)}$$

и т. д. Наиболее практичной для их фактического вычисления является явная формула (4.119). Имеются полные таблицы многочленов Якоби (см. [3]). Для многочленов

Якоби существуют рекуррентные соотношения не только по параметру n, но и по параметрам λ и n; λ, μ и n, следующие из формул Гаусса для гипергеометрических функций, частным случаем которых являются многочлены Якоби.

Производящая функция. Пусть $I(x, w)$ — производящая функция многочленов Якоби (см. п. 4). Тогда формула (4.96) дает

$$I(x, w)=\frac{2^{\lambda+\mu}}{\sqrt{1+4xw+4w^2}}\left(1+2w+\sqrt{1+4wx+4w^2}\right)^{-\lambda}\times$$
$$\times\left(1-2w+\sqrt{1+4wx+4w^2}\right)^{-\mu} \tag{4.122}$$

и

$$I(x, w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{J}_n^{(\lambda,\mu)}(x)}{n!}w^n, \tag{4.123}$$

где

$$\tilde{J}_n^{(\lambda,\mu)}=(1-x)^{-\lambda}(1+x)^{-\mu}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{(\lambda+n)}(1+x)^{\mu+n}\right]. \tag{4.124}$$

Часто производящую функцию для многочленов Якоби записывают в виде

$$I(x, t)=\frac{2^{\lambda+\mu}}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\left(1-t+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^{-\lambda}\times$$
$$\times\left(1+t+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^{-\mu}, \tag{4.125}$$

где $t=-2w$; тогда коэффициенты разложения по степеням t суть многочлены $j_n^{(\lambda,\mu)}(x)$ (см. (4.119)). Для ультрасферических многочленов ($\lambda=\mu$) производящая функция упрощается, если ввести вместо многочленов $j_n^{(\lambda,\lambda)}(x)$ многочлены

$$\gamma_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma\left(n+\alpha+\frac{1}{2}\right)}j_n^{\lambda,\lambda}(x),\quad \text{где}\quad \alpha=\lambda+\frac{1}{2};$$

именно

$$(1-2xt+t^2)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n^{(\alpha)}(x)\,t^n. \tag{4.126}$$

Пользуясь ультрасферическими многочленами γ_n^{α}, Н. Я. Сонин получил формулу, аналогичную формуле Тейлора,

$$f(x+\alpha)=2^{\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)\frac{J_{n+\nu}(\alpha)}{\alpha^{\nu}}\frac{\gamma_n^{(\nu)}(lD)}{l^n}f(x), \quad (4.127)$$

где $J_k(\alpha)$ — функция Бесселя, $D=\frac{d}{dx}$.

Дифференциальное уравнение многочленов Якоби. Дифференциальное уравнение (4.90) для многочленов, ортогональных по весу Пирсона, в случае многочленов Якоби имеет вид

$$(1-x^2)y''+[(\mu-\lambda)-(\mu+\lambda+2)x]y'+$$
$$+n(\lambda+\mu+n+1)y=0. \quad (4.128)$$

Оценки для многочленов Якоби и сходимость рядов Фурье. При условии

$$\sigma=\max\{\lambda, \mu\}\geqslant-\frac{1}{2} \quad (4.129)$$

имеют место следующие теоремы.

Теорема 28. *Наибольшее по модулю значение многочлена $J_n^{(\lambda, \mu)}(x)$ достигается на отрезке $[-1, 1]$ в одной из точек $x=\pm 1$.*

Теорема 29. *Нормированные многочлены Якоби при условии* (4.129) *удовлетворяют соотношению*

$$|\hat{J}_n^{(\lambda, \mu)}(x)|<Mn^{\sigma+\frac{1}{2}}$$

для всех $|x|\leqslant 1$.

Здесь M — постоянная, зависящая от λ и μ.

Из теоремы 29 следует оценка для функции Лебега многочленов Якоби

$$L_n(x)<M_1n^{2\sigma+2},$$

откуда, а также из общей теоремы 21 (см. § 3), следует

Теорема 30. *Пусть $\sigma\geqslant-\frac{1}{2}$ и p есть натуральное число, не меньшее чем $2\sigma+2$. Всякая функция $f(x)$, заданная на $[-1, 1]$ и имеющая непрерывную производную порядка p, разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по многочленам $\hat{J}_n^{(\lambda, \mu)}(x)$.*

7. Многочлены Чебышева первого рода. Многочлены Чебышева первого рода являются частным случаем многочленов Якоби (см. § 4, п. 6), соответствующим $\lambda=\mu=-\frac{1}{2}$. Многочлены $J_n^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}$ были введены в рассмотрение впервые П. Л. Чебышевым в 1857 г. при решении проблемы наилучшего приближения непрерывных функций многочленами. Будем их обозначать через $T_n(x)$; многочлены $T_n(x)$ были получены Чебышевым в форме

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x). \tag{4.130}$$

Формула (4.130) определяет $T_n(x)$ только на отрезке $[-1, 1]$. Однако определение (4.130) может быть распространено на все значения x с помощью известной тригонометрической формулы

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-$$

(в дальнейшем без оговорок предполагается такое дополнение определения (4.130)).

Многочлен $T_n(x)$, кроме общих свойств, которыми он обладает как многочлен ортогональной системы многочленов, имеет много замечательных так называемых *экстремальных свойств*, мы эти свойства излагаем после свойств, общих всем ортогональным многочленам.

Формула Родрига

$$T_n(x)=A_n\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^n \tag{4.131}$$

Многочлен со старшим коэффициентом, равным единице, будем обозначать через $\overline{T}_n(x)$, нормированный — через $\hat{T}_n(x)$.

Явное выражение. Формула (4.130) дает явное выражение многочленов Чебышева, причем

$$\left.\begin{aligned}\overline{T}_n(x)&=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x),\\ \hat{T}_n(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x).\end{aligned}\right\} \tag{4.132}$$

Выражение (4.130) может быть представлено также в виде

$$\left.\begin{gathered} T_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \\ \text{или} \\ T_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k 2^{n-2k-1}x^{n-2k}. \end{gathered}\right\} \quad (4.133)$$

Нули многочлена $T_n(x)$, как следует из формулы (4.130), суть числа

$$x_k^{(n)}=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (4.134)$$

Рекуррентные формулы

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x), \quad (4.135)$$

$$\overline{T}_n(x)=x\overline{T}_{n-1}(x)-\frac{1}{4}\overline{T}_{n-2}(x) \quad (4.136)$$

следуют из формулы (4.120) при $\lambda=\mu=-\frac{1}{2}$. Так как $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, то из равенства (4.135) следует

$$\begin{aligned} T_2(x)&=2x^2-1, \\ T_3(x)&=4x^3-3x, \\ T_4(x)&=8x^4-8x^2+1, \\ T_5(x)&=16x^5-20x^3+5x, \\ T_6(x)&=32x^6-48x^4+18x^2+1 \end{aligned} \qquad \text{и т. д.}$$

Цепная дробь (4.62) для многочленов Чебышева имеет вид

$$\frac{\pi}{x-}\,\frac{\frac{1}{4}}{x-}\,\frac{\frac{1}{4}}{x-}\,\frac{\frac{1}{4}}{x-}\cdots, \quad (4.137)$$

здесь

$$\lambda_0=\pi=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda_i=\frac{1}{4}, \quad d_i=0.$$

Знаменатель n-й подходящей дроби цепной дроби (4.137) есть $\overline{T}_n(x)$. Цепная дробь (4.137) сходится для всех x вне интервала $(-1,\ 1)$ к функции $\frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}$.

Производящая функция. В разложении функции

$$T(x,\ t)=\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} \tag{4.138}$$

по степеням t коэффициент при t^n есть многочлен $T_n(x)$

$$T(x,\ t)=\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=T_0+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)\,t^n.$$

Дифференциальное уравнение для многочленов Чебышева имеет вид

$$(1-x^2)\,y''-xy'+n^2y=0. \tag{4.139}$$

Разложение функции в ряд Фурье по многочленам Чебышева и его сравнение с ее разложением в ряд Маклорена. Ряды Фурье по многочленам Чебышева $T_n(x)$ широко применяются для равномерной аппроксимации функций. Заметим, что разложение в ряд Фурье по многочленам $T_n(x)$ функции $f(x)$ на $[-1,\ 1]$ сводится к разложению функции $f(\cos x)$ на $[-\pi,\ \pi]$ в ряд Фурье по косинусам.

Например,

$$e^{a\cos\varphi}=I_0(a)+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(a)\cos n\varphi,$$

где $I_n(a)$ — функция Бесселя, поэтому замена $x=\cos\varphi$ дает

$$e^{ax}=I_0(a)+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(a)\,T_n(x).$$

Таким же образом получается разложение для $f(x)=x^n$ из известных тригонометрических формул

$$\cos^{2n}\varphi=\frac{1}{2^{2n}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2C_{2n}^{k}\cos 2\,(n-k)\,\varphi+C_{2n}^{n}\right),$$

$$\cos^{2n-1}\varphi=\frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n-1}^{k}\cos(2n-2k-1)\,\varphi.$$

Замена $x = \cos\varphi$ дает

$$\left.\begin{aligned} x^{2n} &= \frac{1}{2^{2n}}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2C_{2n}^k T_{2n-2k}(x) + C_{2n}^n\right), \\ x^{2n-1} &= \frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k T_{2n-2k-1}(x). \end{aligned}\right\} \tag{4.140}$$

Аналогично, из разложений по косинусам следуют разложения по многочленам Чебышева $\overline{T}_n(x)$ (при $|x| < 1$)

$$|x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{2n}(x)}{4n^2-1}, \tag{4.141}$$

$$\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1}, \tag{4.142}$$

$$\cos ax = J_0(a) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(a)\, T_{2n}(x), \tag{4.143}$$

$$\sin ax = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}J_{2n-1}(a)\, T_{2n-1}(x), \tag{4.144}$$

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{T_{2n-1}(x)}{(2n-1)^2}, \tag{4.145}$$

$$e^{ax} = I_0(a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(a)\, T_n(x), \tag{4.146}$$

$$\ln(1-2qx+q^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\overline{T}_n(x) \quad (|q| < 1). \tag{4.147}$$

Вообще, если C_k — коэффициент Фурье $f(\cos x)$ по системе $\{\cos n\varphi\}$, то

$$C_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\, T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.148}$$

Грубо говоря, при приближенном представлении таких фукций суммой одинакового числа членов получается оценка точности для разложения по многочленам Чебышева в 2^{n-1} раз лучше, чем для ряда Тейлора.

Например, при $|x| \leqslant 1$ из (4.146) следует, что для $f(x) = e^{nx}$ при больших n

$$C_n = 2I_n(a) \approx 2\left[\frac{a^n}{n!\,2^n} + \frac{a^{n+2}}{(n+1)!\,2^{n+2}} + \qquad\right] \approx \frac{a^n}{n!\,2^{n-1}},$$

в то время как

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a^n}{n!}.$$

Если под интегралом в формуле (4.148) подставить выражение $f(x)$ по формуле Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \qquad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \ldots,$$

то благодаря свойству ортогональности многочленов $T_k(x)$ и выражению (4.139) и (4.140) получается интересная связь между коэффициентом C_n в разложении $f(x)$ по многочленам Чебышева и соответствующим коэффициентом формулы Маклорена для $f(x)$, а именно,

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!\,1!} + \frac{f^{(n+4)}(0)}{(n+4)!\,2!} + \ldots\right) \tag{4.149}$$

Из формулы (4.149) следует, что если при больших n главная часть $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots\right)$ сводится к $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, то

$$C_n \approx \frac{1}{2}\,\frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{4.150}$$

Из соотношения (4.150) следует, что для $|x| < \frac{1}{2}$ лучшим, вообще говоря, является разложение функции в ряд Маклорена, а для $\frac{1}{2} < |x| < 1$ лучшим оказывается разложение по многочленам Чебышева, так как

$$\max |C_n T_n(x)| = C_n \frac{1}{2^{n-1}} < \max_{\frac{1}{2} < |x| \leqslant 1} \left|\frac{f^n(0)}{n!}\,x^n\right|.$$

Сходимость рядов Фурье по многочленам Чебышева. Благодаря тому, что

$$|T_n(x)| \leqslant 1,$$

из теоремы 19 § 3 следует

Теорема 31. *Для любой функции $f(x)$, интегрируемой на $(-1, 1)$ по весу $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ее ряд Фурье по системе $\{T_n(x)\}$ сходится к значению $f(x)$ в каждой точке x, для которой существует интеграл*

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Функция Лебега системы многочленов Чебышева удовлетворяет неравенству

$$L_n(x) \leqslant 2 + \ln n.$$

Поэтому (см. теорему 23 § 3) имеет место

Теорема 32. *Всякая функция $f(x)$, для которой*

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f) \ln n = 0,$$

разлагается в равномерно сходящийся ряд по многочленам Чебышева.

Экстремальные свойства многочленов Чебышева. Теорема 33 (Чебышева). *Из всех многочленов со старшим коэффициентом, равным единице, наименьшее уклонение от нуля имеет многочлен $\overline{T}_n(x)$, т. е.*

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\overline{T}_n(x)| < \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |Q_n(x)|$$

для всех многочленов $Q_n(x)$ степени n, имеющих старший коэффициент, равный единице.

Следствие. Так как

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\overline{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}},$$

то для всякого многочлена $Q_n(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице,

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |Q_n(x)| > \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Следствием теоремы является следующее интерполяционное свойство нулей многочлена Чебышева. Пусть для функции $f(x)$, дифференцируемой n раз на $[-1, 1]$, строится интерполяционный многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени $n-1$ по n точкам $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда остаточный член точечной интерполяции выражается формулой

$$R_n(x) = f(x) - Q_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где

$$x_i < x_{i+1} \quad \text{и} \quad \xi \in (x_1, x_n).$$

Если узлы интерполяции $x_1, x_2, \quad x_n$ суть нули многочлена Чебышева $T_n(x)$, то

$$\max_{x \in [-1, 1]} |(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)|$$

имеет наименьшее значение.

Таким образом, если в формуле (4.148) коэффициент $f^{(n)}(\xi)$ мало меняется в зависимости от изменения $x \in (-1, 1)$, то узлы интерполяции, являющиеся корнями многочлена $T_n(x)$, дают наименьшее значение остаточного члена.

Теорема 34 (Чебышева). *Из всех многочленов $Q_n(x)$, подчиненных условию $Q_n(\xi) = M$, где $|\xi| < 1$, наименее уклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$ многочлен $\frac{MT_n(x)}{T_n(\xi)}$.*

Теорема 35 (А. А. Маркова и В. А. Маркова). *Если на $[-1, 1]$ многочлен $Q_n(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$|Q_n(x)| \leqslant M,$$

то производная порядка k этого многочлена удовлетворяет на $[-1, 1]$ неравенству

$$|Q_n^{(k)}(x)| \leqslant M\frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}, \tag{4.151}$$

причем знак равенства в (4.151) имеет место только для многочлена $T_n(x)$ в точках $x = \pm 1$.

8. Многочлены Чебышева второго рода. Многочлены второго рода относительно веса $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (см. § 3, п. 4), т. е. числители подходящих дробей цепной дроби (4.137) образуют ортогональную систему на $[-1, 1]$ по весу $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ и, таким образом, являются многочленами Якоби, соответствующими случаю $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. Они называются *многочленами Чебышева второго рода*. Будем их обозначать через $U_n(x)$.

Многочлены Чебышева $U_n(x)$ и $T_{n+1}(x)$ связаны соотношением

$$U_n(x) = C_n \frac{d}{dx} T_{n+1}(x). \tag{4.152}$$

Явное выражение многочленов. Из формулы (4.152) следует выражение

$$U_n(x) = C_n \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.153}$$

Формула (4.153) определяет $U_n(x)$ только в интервале $(-1, 1)$, однако это определение распространяется на все значения x с помощью известного тригонометрического тождества

$$\sin(n+1)\varphi = \sin^{n+1}\varphi - C_{n+1}^2 \sin^{n-1}\varphi\cos^2\varphi + \\ + C_{n+1}^4 \sin^{n-3}\varphi\cos^4\varphi - \ldots$$

Пусть $\overline{U}_n(x)$ имеет коэффициентом при x^n единицу, а $\hat{U}_n(x)$ имеет $\|\hat{U}_n\| = 1$. Тогда

$$\overline{U}_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.154}$$

$$\hat{U}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.155}$$

Рекуррентная формула. Как числители цепной дроби (4.137) многочлены $\overline{U}_n(x)$ удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и $T_{n+1}(x)$,

$$\overline{U}_{n+2}(x) = x\overline{U}_{n+1}(x) - \frac{1}{4}\overline{U}_n(x),$$

где $\bar{U}_0(x)=1$, $\bar{U}_1(x)=x$; отсюда

$$\bar{U}_2(x)=x^2-\frac{1}{4},$$

$$\bar{U}_3(x)=x^3-\frac{1}{2}x,$$

$$\bar{U}_4(x)=x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{16} \text{ и т. д.}$$

Цепная дробь для многочленов $\bar{U}_n(x)$. Многочлены $\bar{U}_n(x)$, образующие ортогональную систему по весу $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$, в свою очередь являются знаменателями n-й подходящей дроби цепной дроби

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{x-}\,\frac{\frac{1}{4}}{x-}\,\frac{\frac{1}{4}}{x-}\,\cdots, \tag{4.156}$$

где

$$\lambda_0=\frac{\pi}{2}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx, \quad \text{а} \quad \lambda_i=\frac{1}{4} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Числители n-й подходящей дроби цепной дроби (4.156) суть $\bar{U}_{n-1}(x)$. Цепная дробь (4.156) сходится для всех x, лежащих вне отрезка $[-1,\ +1]$, к функции

$$f(x)=\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\pi.$$

Ряды Фурье по многочленам Чебышева $U_n(x)$. Имеют место оценки

$$\left.\begin{aligned} |\hat{U}_n(x)| &< \sqrt{\frac{2}{\pi}}(n+1) && (-1\leqslant x\leqslant 1),\\ |\hat{U}_n(x)| &< \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (-1<x<1). \end{aligned}\right\} \tag{4.157}$$

Из оценки (4.157) и общих теорем (см. § 3, п. 5) следуют теоремы.

Теорема 36. *Всякая функция, имеющая непрерывную производную третьего порядка, разлагается в равномерно сходящийся ряд по многочленам* $\hat{U}_n(x)$.

Теорема 37. *Каждая функция* $f(x)$ *из* $L^2_{\sqrt{1-x^2}}(-1,\ 1)$ *разлагается в ряд Фурье по ортогональным многочле-*

нам $\hat{U}_n(x)$ *в каждой точке* x, *для каждой* $f(x)$ *существует интеграл*

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\right)^2\sqrt{1-t^2}\,dt. \tag{4.158}$$

Теорема 38. *Если функция* $f(x)$, *заданная на* $[-1, 1]$, *удовлетворяет условию Дини — Липшица*

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)\ln\delta=0, \tag{4.159}$$

то в интервале $(-1, 1)$ *она разлагается в ряд Фурье по многочленам* $U_n(x)$, *сходимость которого равномерна в любом интервале* $(-1+h, 1-h)$.

Формула (4.152) позволяет (при выполнении соответственных условий сходимости) из разложения

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nT_n(x) \tag{4.160}$$

получить почленным дифференцированием разложение

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nU_{n-1}(x).$$

Из приведенных выше разложений (4.139) — (4.142) по многочленам T_n получаем следующие разложения по многочленам U_n:

$$e^{ax}=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}nI_n(a)\,U_{n-1}(x),$$

$$\operatorname{sign}x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nU_{2n-1}(x)}{4n^2-1},$$

$$\sin ax=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n2nJ_{2n}(a)\,U_{2n-1}(x),$$

$$\cos ax=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)\,J_{2n-1}(a)\,U_{2(n-1)}(x)$$

и т. д.

Экстремальное свойство многочленов $\bar{U}_n(x)$. Теорема 39 (Чебышева). *Из всех многочленов $Q_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, наименьшее значение интегралу*

$$\int_{-1}^{1} |Q_n(x)|\, dx$$

дает многочлен $Q_n(x) \equiv \bar{U}_n(x)$.

9. Многочлены Лагерра. Многочлены, ортогональные на интервале $(0, +\infty)$ по весу $\rho(x) = x^{\alpha}e^{-x}$ $(\alpha > -1)$, обычно называются *многочленами Лагерра* или *Чебышева — Лагерра*.

При $\alpha = 0$ эти многочлены впервые встречаются в аналитической механике Лагранжа, затем в посмертных мемуарах Абеля. В 1859 г. Чебышев рассматривал эти многочлены, получил для них рекуррентную формулу и разложение в цепную дробь, и только в 1878 г. их рассматривает Лагерр. Случай любого $\alpha > -1$ впервые рассмотрел Сохоцкий.

Иногда многочленами Лагера называют только случай $\alpha = 0$, а в случае $\alpha \neq 0$ говорят об *обобщенных многочленах Лагерра*. Будем их обозначать $L_n^{\alpha}(x)$.

Формула Родрига

$$L_n^{\alpha}(x) = A_n x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right). \tag{4.161}$$

Многочлен $\bar{L}_n^{\alpha}(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице, получается из (4.161) при $A_n = (-1)^n$, а нормированный многочлен $\hat{L}_n^{\alpha}(x)$ — при

$$A_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha + n + 1)}}.$$

Рекуррентная формула

$$\bar{L}_{n+2}^{\alpha}(x) = (x - \alpha - 2n - 3)\bar{L}_{n+1}^{\alpha}(x) - (n+1)(n+\alpha+1)\bar{L}_n^{\alpha}(x). \tag{4.162}$$

В случае $\alpha = 0$ она превращается в формулу

$$\bar{L}_{n+2}(x) = (x - 2n - 3)\bar{L}_{n+1}(x) - (n+1)^2 \bar{L}_n(x),$$

из которой, исходя из $\bar{L}_0(x) = 1$, $\bar{L}_1(x) = x - 1$, находим

$$\bar{L}_2(x) = x^2 - 4x + 2,$$
$$\bar{L}_3(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6, \quad \text{и т. д.}$$

Цепная дробь для многочленов $\overline{L}_n^{\alpha}(x)$. В случае $\alpha=0$ цепная дробь (4.162), знаменателем n-й подходящей дроби которой является многочлен $\overline{L}_n(x)$, имеет вид

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1^2}{x-3}-\frac{2^2}{x-5}-\frac{3^2}{x-7}- \tag{4.163}$$

Цепная дробь (4.163) сходится для всех x, не лежащих на $(0, +\infty)$, к функции

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{x-t}\,dt.$$

Цепная дробь для любого α

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x-(\alpha+1)}-\frac{\alpha+1}{x-(\alpha+3)}-\frac{2(\alpha+2)}{x-(\alpha+5)}-\frac{3(\alpha+3)}{x-(\alpha+7)}-\ldots \tag{4.164}$$

сходится при любом x, не лежащем на $(0, +\infty)$, к функции

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{\alpha}}{x-t}\,dt.$$

Дифференциальное уравнение для $L_n^{\alpha}(x)$

$$xy''+(\alpha+1-x)\,y'+ny=0. \tag{4.165}$$

Сохоцкий получил формулу для представления степени x^n по многочленам Лагерра

$$x^n=\Gamma(n+\alpha+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{L_{n-k}^{\alpha}(x)}{\Gamma(n-k+\alpha+1)}.$$

Производящая функция

$$(1-t)^{-\alpha-1}e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n L_n^{\alpha}(x)}{n!}. \tag{4.166}$$

Формула (4.166) впервые получена Сохоцким. Производящая функция может быть также представлена в виде

$$\psi_{\alpha}(t,\ x)=e^{-t}\frac{I_{\alpha}(2i\sqrt{tx})}{(i\sqrt{tx})^{\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{\alpha}(x)\,t^n}{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}, \tag{4.167}$$

где $I_\alpha(z)$ — функция Бесселя. Формулу (4.167) получил Н. Я. Сонин. Сониным получены были также соотношения

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)}\frac{d\overline{L}^{\alpha}_{n+1}(x)}{dx} &= \overline{L}^{\alpha}_{n}(x) - \frac{d\overline{L}^{\alpha}_{n}(x)}{dx}, \\ \frac{n(n+\alpha)\overline{L}^{(\alpha)}_{n-1}(x)}{x^{n-1}} &= -\frac{d}{d\frac{1}{x}}\left\{\frac{\overline{L}^{\alpha}_{n}(x)}{x^{n}}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.168}$$

Замкнутость системы $\{L^{\alpha}_{n}(x)\}$. Проблема моментов для последовательности

$$\mu_n = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha+n}\,dx$$

определена, откуда по теореме Рисса (см. § 3, п. 7) следует замкнутость системы $\{\hat{L}^{\alpha}_{n}(x)\}$ в пространстве $L^2_{e^{-x}x^{\alpha}}(0, +\infty)$.

Многочлены Лагерра могут быть получены из многочленов Якоби $J^{(\lambda,\mu)}_{n}$ путем предельного перехода

$$L^{\lambda}_{n}(x) = \lim_{\mu\to\infty} J^{(\lambda,\mu)}_{n}\left(1-\frac{2x}{\mu}\right) \tag{4.169}$$

(формула К. А. Поссе).

10. Многочлены Эрмита. Многочлены, ортогональные на $(-\infty, +\infty)$ по весу $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, называются *многочленами Эрмита*. Иногда многочленами Эрмита называют многочлены, ортогональные по весу e^{-x^2}. Впервые такие многочлены встречаются у Лапласа, а затем у Чебышева (1859 г). Чебышев получил для них формулу Родрига и разложение в цепную дробь. Через 5 лет после Чебышева эти многочлены были рассмотрены Эрмитом.

Формула Родрига

$$H_n(x) = A_n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right); \tag{4.170}$$

при $A_n = (-1)^n$ получаем $\overline{H}_n(x)$ — многочлен со старшим коэффициентом, равным единице; при $A_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}\sqrt{2\pi}}$ — нормированный многочлен $\hat{H}_n(x)$.

Рекуррентная формула

$$\overline{H}_{n+1}(x) = x\overline{H}_n(x) - n\overline{H}_{n-1}(x); \qquad (4.171)$$

так как $\overline{H}_0(x) = 1$, $\overline{H}_1(x) = x$, то получаем

$$\begin{aligned} &\overline{H}_2(x) = x^2 - 1, \\ &\overline{H}_3(x) = x^3 - 3x, \\ &\overline{H}_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, \\ &\overline{H}_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x, \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Производящая функция

$$e^{xt - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{H}_n(x)\, t^n}{n!}. \qquad (4.172)$$

Цепная дробь (4.62), знаменателем n-й подходящей дроби которой является многочлен $H_n(x)$, есть

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{x -}\,\frac{1}{x -}\,\frac{2}{x -}\,\frac{3}{x -} \qquad (4.173)$$

Дробь (4.173) сходится для всех не действительных значений x к функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{x - t}\, dt.$$

Дифференциальное уравнение для многочленов Эрмита

$$y'' - xy' + ny = 0. \qquad (4.174)$$

Многочлены $H_n(x)$ могут быть получены также из многочленов Якоби $j_n^{(\lambda, \lambda)}(x)$ при $\lambda \to \infty$

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \lim_{\lambda \to \infty} \left[\lambda^{-\frac{n}{2}} j_n^{(\lambda, \lambda)}\left(\frac{x}{\sqrt{2\lambda}} \right) \right]. \qquad (4.175)$$

Замкнутость системы многочленов Эрмита. Проблема моментов для последовательности

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

определена. Поэтому из теоремы Рисса (см. § 3, п. 7) следует замкнутость системы $\{H_n(x)\}$ в пространстве $L^2_{e^{-\frac{x^2}{2}}}(-\infty, +\infty)$.

11. Многочлены Чебышева, ортогональные на конечной системе точек. В мемуаре «О непрерывных дробях» в 1855 г. и ряде других работ Чебышев рассматривает разложение суммы

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i}, \qquad \theta^2(x_i) = m_i$$

в цепную дробь и изучает свойства знаменателей ее подходящих дробей.

Если $\sigma(x)$ есть ступенчатая функция с точками роста $x_1, x_2, \ldots, x_N$, скачки в которых равны соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_N$, то

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{z - x}. \tag{4.176}$$

Знаменатели подходящих дробей цепной дроби (типа (4.62)), соответствующей интегралу (4.176), суть тогда многочлены, ортогональные по весу $\sigma(x)$.

Ортогональность $P_s(x)$ и $P_k(x)$ по весу $\sigma(x)$ в этом случае означает, что

$$\sum_{i=1}^{N} \theta^2(x_i) P_s(x_i) P_k(x_i) = 0, \qquad s \neq k.$$

Тогда цепная дробь (4.62) конечна, система ортогональных многочленов также конечна и содержит ровно N многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_{N-1}(x)$. Чебышев применил результаты своих исследований к интерполированию по способу наименьших квадратов. Задача *интерполирования по способу наименьших квадратов* ставится так. Заданы значения функции $f(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Среди всех многочленов данной степени $n < N$ найти такой многочлен $Q_n(x)$, чтобы сумма

$$\sum_{i=1}^{N} [f(x_i) - Q_n(x_i)]^2 \tag{4.177}$$

была наименьшей (см. § 1, п. 3).

Пусть в (4.176) $\theta^2(x_i)=1$, тогда

$$\sum_{i=1}^{N}[f(x_i)-Q_n(x_i)]^2=\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-Q_n(x))^2\,d\sigma(x).$$

И, как следует из § 2, п. 4, наименьшее значение выражение (4.177) принимает, когда $Q_n(x)$ есть n-й отрезок ряда Фурье функции $f(x)$ по системе многочленов, ортогональных по весу $\sigma(x)$.

Для системы равноотстоящих узлов на отрезке $[0, 1]$

$$x_i=\frac{i}{N}\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

Чебышев построил ортогональную систему многочленов $\{\theta(x_i)^2=1\}$. Они также называются *многочленами Чебышева*. Будем их обозначать $P_{k,N}(x)$ (многочлен k-й степени по системе $\left\{x_i=\frac{i}{N}\right\}$):

$$P_{k,N}(x)=1+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x-2)+\ldots$$
$$\ldots+a_kx(x-1)\ldots(x-k+1),$$

где

$$a_s=\frac{(-1)^sC_k^sC_{k+1}^s}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}.$$

В частности,

$$P_{0,N}(x)=1,$$

$$P_{1,N}(x)=1-2\frac{x}{N},$$

$$P_{2,N}(x)=1-6\frac{x}{N}+6\frac{x(x-1)}{N(N-1)},$$

$$P_{3,N}(x)=1-12\frac{x}{N}+30\frac{x(x-1)}{N(N-1)}-20\frac{x(x-1)(x-2)}{N(N-1)(N-2)},$$

$$P_{4,N}(x)=1-20\frac{x}{N}+90\frac{x(x-1)}{N(N-1)}-$$
$$-140\frac{x(x-1)(x-2)}{N(N-1)(N-2)}+70\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)},$$

$$P_{5,N}(x)=1-30\frac{x}{N}+210\frac{x(x-1)}{N(N-1)}-$$
$$-560\frac{x(x-1)(x-2)}{N(N-1)(N-2)}+630\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)}-$$
$$-252\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)},$$

и т. д. Интерполяционный многочлен степени m по системе узлов $\left\{x_l=\frac{l}{N}\right\}$ для функции $f(x)$, определяемый по способу наименьших квадратов, есть отрезок ряда Фурье функции $f(x)$ m-го порядка по системе $\{P_{k,N}(x)\}$

$$Q_m(x)=\sum_{k=0}^{m} C_k P_{k,N}(x),$$

где

$$C_k=\int_0^1 f(x) P_{k,N}(x)\,d\sigma(x)=\sum_{l=1}^{N} f(x_l) P_{k,N}(x_l).$$

Выражение для C_k не зависит от степени интерполяции m. При увеличении степени интерполяционного многочлена лишь добавляются новые члены

$$Q_{m+1}(x)=Q_m(x)+C_{m+1}P_{m+1,N}(x).$$

П. Л. Чебышев указал на то, что случай, когда функция $\sigma(x)$ непрерывна, можно получить путем предельного перехода из случая, когда функция $\sigma(x)$ имеет конечное число точек роста. В частности, из многочленов $P_{k,N}(x)$ при $N\to\infty$ могут быть получены многочлены Лежандра. Если $L_k(x)$ — многочлен Лежандра, нормированный условием, что $L_k(1)=1$, то

$$L_k(2x-1)=\frac{(2k)!}{(k!)^2}\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{P_{k,N}(Nx)}{N^k}\right\} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.178}$$

ГЛАВА V
ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Введение

1. Обозначения цепной дроби. Основные определения. *Цепной*, или *непрерывной*, *дробью* называют выражение

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cdots+\cfrac{a_n}{b_n+\cdots}}}$$

Вследствие громоздкости такого рода записи различные авторы предлагали другие виды записи цепной дроби, например:

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\qquad+\frac{a_n|}{|b_n}+ \qquad \text{(Прингсгейм)}$$

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}\dot{+}\frac{a_2}{b_2}\dot{+}\qquad\dot{+}\frac{a_n}{b_n}\dot{+} \qquad \text{(Мюллер)}$$

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\qquad\frac{a_n}{+\,b_n+} \qquad \text{(Роджерс).} \qquad (5.1)$$

Мы будем пользоваться последним обозначением. Прингсгейм предложил также обозначение цепной дроби в виде $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ Если же в цепной дроби (5.1) a_1 и b_1 следуют иному закону, чем остальные a_n и b_n, то Прингсгейм пользовался обозначением $\left[b_0;\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$

Дробь $\frac{a_n}{b_n}$ называют *n-м звеном* цепной дроби (5.1); a_n и b_n — *членами n-го звена* цепной дроби; $a_1, a_2, a_3, \ldots$

называют *частными числителями* ее; b_1, b_2, b_3, ... — ее *частными знаменателями*; b_0 называют *нулевым звеном* цепной дроби.

Все члены звеньев цепной дроби предполагаются конечными. Все частные знаменатели цепной дроби обычно считают не равными нулю.

Цепная дробь, имеющая конечное множество звеньев, называется *конечной*.

Цепная дробь, имеющая бесконечное множество звеньев, называется *бесконечной*.

2. Краткая историческая справка. Алгоритмы, сходные с цепными дробями, применялись еще древнегреческими математиками (алгоритм Евклида, архимедовы приближения для $\sqrt{3}$). Из средневековых математиков близко подошел к цепным дробям Омар Хайям (ок. 1040—1123 гг.), пытавшийся обобщить алгоритм Евклида на случай несоизмеримых величин. Впервые же цепные дроби, как таковые, появились в «Алгебре» итальянского математика Р. Бомбелли, вышедшей в 1572 г. Ряд выдающихся математиков XVII века, в том числе Дж. Валлис и Хр. Гюйгенс, занимались цепными дробями, но основателем теории цепных дробей как самостоятельного раздела математики является Л. Эйлер. Почти все крупные математики XVIII века и первой половины XIX века внесли свой вклад в развитие теории цепных дробей. В настоящее время вновь возрос интерес к цепным дробям в связи с их большим теоретическим и прикладным значением. В частности, цепные дроби используются в различных приближенных вычислениях. С их помощью можно, например, приближенно вычислять значения многих функций, разложение которых в степенной ряд сходится медленно или даже расходится.

§ 1. Цепные дроби и их основные свойства

1. Вычисление подходящих дробей. Подходящие дроби. Конечную цепную дробь

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \quad + \frac{a_n}{b_n} = \frac{P_n}{Q_n}$$

называют *n-й подходящей дробью* цепной дроби (5.1). При этом полагают

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{b_0}{1}, \quad \frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{1}{0}.$$

Основные рекуррентные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \right\} \quad (5.2)$$

Равенства (5.2) позволяют последовательно вычислять подходящие дроби. При этом целесообразно пользоваться следующей схемой:

$$\begin{array}{cccccc} & b_0+\dfrac{a_1}{b_1}+ & \dfrac{a_2}{b_2}+ & \ldots+ & \dfrac{a_n}{b_n}+ & \ldots, \\ \dfrac{1}{0} & \dfrac{b_0}{1} & \dfrac{P_1}{Q_1} & \dfrac{P_2}{Q_2} & \dfrac{P_n}{Q_n} & \ldots \end{array}$$

Пример 1.

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{1}{0} & \dfrac{1}{1} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{7}{5} & \dfrac{17}{12} & \dfrac{41}{29} & \dfrac{99}{70} \\ & 1 & 1{,}5 & 1{,}4 & 1{,}417 & 1{,}4138 & 1{,}41429 \end{array}$$

Разность между соседними подходящими дробями

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=(-1)^{n+1}\frac{a_1a_2\ldots a_n}{Q_{n-1}Q_n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{5.3}$$

Разность между подходящими дробями, индексы которых отличаются на 2:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=(-1)^{n+1}\frac{a_1a_2\ldots a_nb_{n+1}}{Q_{n-1}Q_{n+1}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{5.4}$$

Цепные дроби с положительными членами звеньев. Из равенств (5.4) следует, что если все члены звеньев цепной дроби положительны, то ее подходящие дроби четного порядка образуют монотонно возрастающую, ограниченную сверху числом $b_0+\frac{a_1}{b_1}$ последовательность. Такая последовательность имеет предел. Следовательно, в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$ существует. Точно так же, если все члены звеньев цепной дроби положительны, то ее подходящие дроби нечетного порядка образуют монотонно убывающую, ограниченную снизу числом b_0 последовательность. Такая последовательность также имеет предел. Следовательно, в этом случае и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}$ существует. Таким образом, значение цепной дроби, все члены звеньев которой положительны (если это значение существует), всегда больше любой подходящей дроби четного порядка и меньше любой подходящей дроби нечетного порядка этой цепной дроби. Значением любой цепной дроби (5.1) считается число $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}$.

2. Преобразования цепных дробей. Основное тождественное преобразование

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}=b_0+$$
$$+\frac{p_1a_1}{p_1b_1}+\frac{p_1p_2a_2}{p_2b_2}+\quad+\frac{p_{n-1}p_na_n}{p_nb_n}+\ldots, \tag{5.5}$$

где $p_1, p_2, \ldots$ — любые числа, конечные и отличные от нуля.

Обыкновенные цепные дроби. Пользуясь преобразованием (5.5), всегда можно привести цепную дробь (5.1) к виду

$$\alpha_0+\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\quad+\frac{1}{\alpha_n}+ \tag{5.6}$$

где

$$\alpha_0=b_0;\quad \alpha_{2k-1}=\frac{a_2a_4\ldots a_{2k-2}b_{2k-1}}{a_1a_3\ldots a_{2k-1}},\quad \alpha_{2k}=\frac{a_1a_3\ldots a_{2k-1}b_{2k}}{a_2a_4\ldots a_{2k}}.$$

Дробь (5.6) называется *обыкновенной цепной дробью*, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — *неполными частными* обыкновенной цепной дроби.

Обыкновенную цепную дробь с натуральными неполными частными называют *правильной*. В теории чисел обычно рассматривают только правильные цепные дроби.

Цепные дроби, у которых все частные знаменатели равны 1. Такие дроби получаются из дроби (5.1) путем преобразования (5.5), в котором положено $p_n=\frac{1}{b_n}$ $(n=1, 2, \ldots)$. При $b_0=0$ такая дробь имеет вид

$$\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{1}+\quad+\frac{c_n}{1}+\ldots, \tag{5.7}$$

где $c_1=\frac{a_1}{b_1}$, $c_n=\frac{a_n}{b_{n-1}b_n}$ $(n=2, 3, \ldots)$.

Члены звеньев цепных дробей (5.6) и (5.7) связаны соотношениями

$$c_1=\frac{1}{\alpha_1}, \qquad c_n=\frac{1}{\alpha_{n-1}\alpha_n} \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Цепная дробь Даниила Бернулли. Цепная дробь, подходящие дроби которой равны K_0, K_1, K_2, ..., имеет вид

$$K_0+\frac{K_1-K_0}{1}+\frac{K_1-K_2}{K_2-K_0}+\frac{(K_1-K_0)(K_2-K_3)}{K_3-K_1}+\ldots$$
$$+\frac{(K_{n-2}-K_{n-3})(K_{n-1}-K_n)}{K_n-K_{n-2}}+\ldots. \qquad (5.8)$$

Пример 2. Цепная дробь, у которой $K_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ $(n=0,\ 1,\ \ldots)$, имеет вид

$$K=1-\frac{3}{4\cdot 1}-\frac{1\cdot 5}{4\cdot 2}-\frac{3\cdot 7}{4\cdot 3}-\frac{5\cdot 9}{4\cdot 4}-\quad-\frac{(2n-3)(2n+1)}{4n}-$$
$$\frac{1}{1}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{3}{27}\quad \frac{15}{240}$$

3. Сжатие и растяжение цепных дробей. Если за K_0, K_1, K_2, взять некоторую подпоследовательность подходящих дробей цепной дроби (5.1), то говорят, что дробь (5.8) получилась путем *сжатия дроби* (5.1). Если же за K_0, K_1, K_2, взять последовательность, включающую в себя, в частности, все подходящие дроби выражения (5.1), то говорят, что дробь (5.8) получилась путем *растяжения дроби* (5.1).

Положив $K_n=\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$, имеем

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}+\ldots=b_0+\frac{a_1b_2}{b_1b_2+a_2}-$$
$$-\frac{a_2a_3b_4}{(b_2b_3+a_3)b_4+b_2a_4}-\frac{a_4a_5b_2b_6}{(b_4b_5+a_5)b_6+b_4a_6}-$$
$$\ldots-\frac{a_{2n-2}a_{2n-1}b_{2n-4}b_{2n}}{(b_{2n-2}b_{2n-1}+a_{2n-1})b_{2n}+b_{2n-2}a_{2n}}- \qquad (5.9)$$

Пример 3.

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\quad=1+\frac{2}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\ldots-\frac{1}{6}-\ldots.$$
$$\frac{1}{7}\quad \frac{7}{5}\quad \frac{41}{29}\quad \frac{239}{169}$$

Положив $K_n = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, имеем

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \overset{*}{=} \frac{b_0 b_1 + a_1}{a_1} - \frac{a_1 a_2 b_3}{(b_1 b_2 + a_2) b_3 + b_1 a_3} - \frac{a_3 a_4 b_1 b_5}{(b_3 b_4 + a_4) b_5 + b_3 a_5} - \ldots - \frac{a_{2n-1} a_{2n} b_{2n-3} b_{2n+1}}{(b_{2n-1} b_{2n} + a_{2n}) b_{2n+1} + b_{2n-1} a_{2n+1}} - \ldots$$

Здесь знак $\overset{*}{=}$ показывает, что подходящей дробью нулевого порядка цепной дроби, стоящей в правой части последнего равенства, является дробь $\frac{1}{0}$, а не $\frac{0}{1}$, так как эта цепная дробь имеет своими подходящими дробями только все подходящие дроби нечетного порядка цепной дроби (5.1).

Пример 4.

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \overset{*}{=} \frac{5}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \ldots$$

$$\frac{1}{0} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{29}{12} \quad \frac{169}{70} \quad \frac{985}{408}$$

Если заменить знак $\overset{*}{=}$ обычным равенством, то мы получим разложение

$$\frac{5}{7}(2\sqrt{2}+1) = \frac{5}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \ldots$$

$$\frac{0}{1} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{30}{11} \quad \frac{175}{64} \quad \frac{1020}{373}$$

Связь между обыкновенным и особым значениями цепной дроби. Цепную дробь (5.1) в случае, если $b_0 = 0$, можно рассматривать двояко, в зависимости от того, считать ли ее подходящую дробь нулевого порядка равной $\frac{0}{1}$ или $\frac{1}{0}$. В первом случае значение цепной дроби называют *обыкновенным*, а во втором — *особым*. Обозначив обыкновенное и особое значение одной и той же цепной дроби, соответственно, через K и $\widetilde{K}$, имеем

$$K = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots \qquad \widetilde{K} \overset{*}{=} \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots$$

$$\frac{0}{1} \quad \frac{a_1}{b_1} \quad \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} \qquad\qquad \frac{1}{0} \quad \frac{a_1}{b_1} \quad \frac{a_1 b_2 + a_2}{b_1 b_2}$$

Цепная дробь, для которой $\tilde{K}$ является обыкновенным значением, есть

$$\tilde{K} = \frac{a_1}{b_1 -}\;\frac{\frac{b_1 a_2}{a_1}}{b_2 + \frac{a_2}{a_1} +}\;\frac{a_3}{b_3 +}\;\frac{a_4}{b_4 +}$$

$$\frac{0}{1}\quad \frac{a_1}{b_1}\quad \frac{a_1 b_2 + a_2}{b_1 b_2}$$

Отсюда связь между K и $\tilde{K}$ выражается соотношением

$$K = \frac{a_1}{b_1 \tilde{K} + b_1 - a_1}.$$

4. Преобразование цепных дробей, вытекающее из теоремы Штольца. В математическом анализе известна следующая

Теорема Штольца. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} Q_n = \infty, \quad Q_{n+1} > Q_n$$

для всех n. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1} - P_n}{Q_{n+1} - Q_n},$$

если предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует.

Пользуясь этой теоремой и основным рекуррентным соотношением (5.2), преобразуем дробь (5.1) в цепную дробь, подходящая дробь n-го порядка которой есть $\frac{P_n - P_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}}$, где P_n и P_{n-1} — соответственно числители подходящих дробей n-го и $(n-1)$-го порядка цепной дроби (5.1), а Q_n и Q_{n-1} — знаменатели тех же дробей. Эта цепная дробь имеет вид

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots = b_0 + \frac{a_1}{b_1 - 1} + \frac{a_2 + b_2 - 1}{b_2 - 1} + \frac{\frac{a_3 + b_3 - 1}{a_2 + b_2 - 1}\, a_2}{b_3 - 1 + \frac{a_3 + b_3 - 1}{a_2 + b_2 - 1}} + \ldots + \frac{\frac{a_n + b_n - 1}{a_{n-1} + b_{n-1} - 1}\, a_{n-1}}{b_n - 1 + \frac{a_n + b_n - 1}{a_{n-1} + b_{n-1} - 1}} + \ldots$$

Пример 5.

$$\sqrt{3}=1+\underset{\frac{1}{1}}{}\frac{1}{1}+\underset{\frac{2}{1}}{}\frac{1}{2}+\underset{\frac{5}{3}}{}\frac{1}{1}+\underset{\frac{7}{4}}{}\frac{1}{2}+\underset{\frac{19}{11}}{}\ldots=$$

$$\frac{1}{1}\quad \frac{2}{1}\quad \frac{5}{3}\quad \frac{7}{4}\quad \frac{19}{11}\ \ldots$$

$$=1+\frac{1}{0}+\frac{2}{1}+\frac{1}{1}+\frac{4}{3}+\frac{1}{1}+\frac{4}{3}+$$

$$\frac{1}{1}\quad \frac{1}{0}\quad \frac{3}{2}\quad \frac{4}{2}\quad \frac{24}{14}$$

Более общее преобразование цепных дробей, вытекающее из теоремы Штольца. Применим теорему Штольца к последовательности

$$\left\{\frac{\gamma_n P_n}{\gamma_n Q_n}\right\} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\frac{P_n}{Q_n}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ — подходящие дроби цепной дроби (5.1), а $\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots$ любые числа, не равные нулю. Тогда, если для всех n выполняется неравенство $\gamma_n Q_n > \gamma_{n-1} Q_{n-1}$, то в силу теоремы Штольца имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n P_n-\gamma_{n-1}P_{n-1}}{\gamma_n Q_n-\gamma_{n-1}Q_{n-1}},$$

если предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует.

Пользуясь этим равенством и основным рекуррентным соотношением (5.2), преобразуем дробь (5.1) в цепную дробь, подходящая дробь n-го порядка которой есть $\frac{\gamma_n P_n-\gamma_{n-1}P_{n-1}}{\gamma_n Q_n-\gamma_{n-1}Q_{n-1}}$.
Эта цепная дробь имеет вид

$$K=b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\quad +\frac{a_n}{b_n}+\ldots=$$

$$=b_0+\cfrac{\gamma_1 a_1}{\gamma_1 b_1-\gamma_0+\cfrac{\frac{1}{\gamma_1}(\gamma_1\gamma_2 a_2+\gamma_0\gamma_2 b_2-\gamma_0\gamma_1)}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}b_2-1}}+$$

$$+\frac{\dfrac{\gamma_2\gamma_3 a_3+\gamma_1\gamma_3 b_3-\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2 a_2+\gamma_0\gamma_2 b_2-\gamma_0\gamma_1}\,a_2}{\dfrac{\gamma_3 b_3-\gamma_2}{\gamma_2}+\dfrac{\gamma_0}{\gamma_2}\,\dfrac{\gamma_2\gamma_3 a_3+\gamma_1\gamma_3 b_3-\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2 a_2+\gamma_0\gamma_2 b_2-\gamma_0\gamma_1}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\dfrac{\gamma_{n-1}\gamma_n a_n+\gamma_{n-2}\gamma_n b_n-\gamma_{n-2}\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}\gamma_{n-1}a_{n-1}+\gamma_{n-3}\gamma_{n-1}b_{n-1}-\gamma_{n-3}\gamma_{n-2}}\,a_{n-1}}{\dfrac{\gamma_n b_n-\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-1}}+\dfrac{\gamma_{n-3}}{\gamma_{n-1}}\,\dfrac{\gamma_{n-1}\gamma_n a_n+\gamma_{n-2}\gamma_n b_n-\gamma_{n-2}\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}\gamma_{n-1}a_{n-1}+\gamma_{n-3}\gamma_{n-1}b_{n-1}-\gamma_{n-3}\gamma_{n-2}}}+\ldots$$

Пример 6. ($\gamma_n = n+1$; $n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + \frac{11}{12} + \frac{95}{26} + \frac{319}{44} + \ldots + \frac{(n^3-3n+1)(n^2+n-1)}{2(n^2-3)} + \ldots$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{15}{11} \quad \frac{235}{165} \quad \frac{7535}{5335} \ldots$$

Тем самым получено разложение $\sqrt{2}$ в непериодическую цепную дробь. В учебниках теории чисел доказывается теорема, утверждающая, что всякую квадратичную иррациональность можно разложить в периодическую цепную дробь и что, обратно, значение всякой сходящейся периодической цепной дроби есть некоторая квадратичная иррациональность. Однако, при этом не всегда указывается на то, что квадратичную иррациональность можно разложить и в непериодическую цепную дробь, причем таких разложений существует бесконечное множество. Полученное нами разложение $\sqrt{2}$ в периодическую цепную дробь сходится медленнее, чем исходное разложение $\sqrt{2}$.

Следствие теоремы Штольца и вытекающие из них преобразования цепных дробей. Пусть последовательность $\left\{\frac{P_n}{Q_n}\right\}$ удовлетворяет условиям теоремы Штольца. Тогда и последовательность $\left\{\frac{P_n^2}{Q_n^2}\right\}$ удовлетворяет условиям этой теоремы. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n + P_{n-1}}{Q_n + Q_{n-1}}.$$

На основании этого равенства можно получить следующее преобразование цепной дроби:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \quad + \frac{a_n}{b_n} + \ldots = b_0 + \frac{a_1}{b_1+1} -$$

$$- \frac{b_2 - a_2 + 1}{b_2 + 1} + \frac{\frac{b_3 - a_3 + 1}{b_2 - a_2 + 1}\, a_2}{b_3 + 1 - \frac{b_3 - a_3 + 1}{b_2 - a_2 + 1}} + \ldots + \frac{\frac{b_n - a_n + 1}{b_{n-1} - a_{n-1} + 1}\, a_{n-1}}{b_n + 1 - \frac{b_n - a_n + 1}{b_{n-1} - a_{n-1} + 1}} + \ldots$$

Пример 7.

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{1}+\frac{1}{3}+\frac{4}{1}+\ldots$$

Из теоремы Штольца нетрудно также получить равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n P_n \pm \gamma_{n-k}P_{n-k}}{\gamma_n Q_n \pm \gamma_{n-k}Q_{n-k}},$$

где $\{\gamma_n\}$ — некоторая последовательность, члены которой все отличны от нуля. На основании этого равенства можно получить сколь угодно много различных тождественных преобразований данной цепной дроби.

Еще одно преобразование цепных дробей. Рассмотрим тождество

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots=\frac{b_0}{1}+\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\ldots. \qquad (5.10)$$

Предположим, что подходящие дроби четного порядка дробей, входящих в это тождество, равны между собой, если индексы их одинаковы. Тогда, произведя сжатие этих цепных дробей и путем основного тождественного преобразования сделав равными между собой соответственные члены звеньев сжатых дробей, получим две следующие системы уравнений, связывающие члены звеньев исходных цепных дробей:

$$\left.\begin{aligned} -b_0c_1d_2&=a_1b_2,\\ c_2c_3d_4&=a_2a_3b_4,\\ c_{2n-2}c_{2n-1}d_{2n-1}d_{2n}&=a_{2n-2}a_{2n-1}b_{2n-4}b_{2n} \quad (n=2,3,\ldots)\end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &c_1d_2+d_1d_2+c_2=b_1b_2+a_2,\\ &(d_{2n-2}d_{2n-1}+c_{2n-1})\,d_{2n}+d_{2n-2}c_{2n}=\\ &=(b_{2n-2}b_{2n-1}+a_{2n-1})\,b_{2n}+b_{2n-2}a_{2n} \quad (n=2,3,\ldots).\end{aligned}\right\} \qquad (5.12)$$

Системы (5.11) и (5.12), взятые совместно, содержат $2n$ уравнений с $4n$ неизвестными c_n и d_n $(n=1, 2, \ldots)$. Поэтому в общем случае из уравнений (5.11) и (5.12) нельзя выразить c_n и d_n $(n=1, 2, \ldots)$ через $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$

или, обратно, a_n, b_n $(n=1, 2, \ldots)$ через c_1, c_2, ..., d_1, d_2, ... Но если $b_0=1$, $c_n=-a_n$, $d_{2n}=b_{2n}$, $d_{2n-1}=\lambda_n b_{2n-1}$ $(n=1, 2, \ldots;\ \lambda_n\neq 1)$, то тождество (5.10) примет вид

$$1+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{a_1b_2}{a_1b_2+b_1b_2+2a_2}-\frac{a_2}{1}-\frac{a_3b_4}{b_2b_3b_4+2a_3b_4+2a_4b_2}-\frac{a_4b_2}{1}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{a_{2n-1}b_{2n}}{b_{2n-2}b_{2n-1}b_{2n}+2a_{2n-1}b_{2n}+2a_{2n}b_{2n-2}}-\frac{a_{2n}b_{2n-2}}{1}-\ldots \tag{5.13}$$

Пример 8.

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{2}{8}-\frac{1}{1}-\frac{1}{8}-\frac{1}{1}-\frac{1}{8}-\frac{1}{1}-$$

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{1}\quad \frac{8}{6}\quad \frac{7}{5}\quad \frac{48}{34}\quad \frac{41}{29}\quad \frac{280}{198}\quad \frac{239}{169}\ldots$$

Если выполняются равенства

$$b_0=1,\ a_1=\frac{a_3-a_2}{b_2}=\frac{a_5-a_4}{b_4}=\ldots$$

$$=\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{b_{2n}}=\ldots, \tag{5.14}$$

то равенство (5.10) принимает вид

$$1+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\quad+\frac{a_n}{b_n}+\quad=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_3}{b_2}+\frac{a_2}{b_3}+\ldots+\frac{a_{2n+1}}{b_{2n}}+\frac{a_{2n}}{b_{2n+1}}+\ldots. \tag{5.15}$$

5. Свойства правильных цепных дробей. Правильные цепные дроби. Цепную дробь, у которой все частные числители равны единице, а все частные знаменатели являются натуральными числами, называют *правильной*, или *арифметической*. Из равенства (5.3) следует, что все подходящие дроби правильной цепной дроби несократимы.

Алгоритм Евклида и разложение рациональных чисел в правильные цепные дроби. Пусть даны два натуральных числа u и v, причем $u>v$. Разделив u на v, имеем

$$\frac{u}{v}=q_0+\frac{u_1}{v},$$

где q_0 — частное, u_1 — остаток от деления. Разделив v на u_1, имеем аналогично

$$\frac{v}{u_1}=q_1+\frac{u_2}{u_1}.$$

Продолжая, получим

$$\frac{u_1}{u_2}=q_2+\frac{u_3}{u_2}$$

и т. д. Такой процесс последовательных делений называется *алгоритмом Евклида*. Так как u, u_1, u_2, ... — монотонно убывающая последовательность натуральных чисел, то такой процесс конечен, т. е. существует такой индекс n, что $\frac{u_{n-1}}{u_n}=q_n$ (следовательно, $u_n \neq 0$, $u_{n+1}=0$). Отсюда u_n является *наибольшим общим делителем* чисел u и v. Часто его обозначают через (u, v).

Пример 9. Найти наибольший общий делитель чисел 816 и 323.

Вычисления обычно располагают так:

$$\begin{array}{r|l}
-\,816 & 323 \\
646 & 2 \\
\hline
-\,323 & 170 \\
170 & 1 \\
\hline
-\,170 & 153 \\
153 & 1 \\
\hline
-\,153 & 17 \\
153 & 9 \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$(816, 323)=17$. Отсюда разложение $\frac{816}{323}$ в правильную цепную дробь имеет вид

$$\frac{816}{323}=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{1}\quad \frac{3}{1}\quad \frac{5}{2}\quad \frac{48}{19}.$$

Таким образом, алгоритм Евклида позволяет не только находить наибольший общий делитель двух натуральных чисел, но и разлагать их отношение в правильную цепную дробь.

Решение в целых числах неопределенного уравнения первой степени при помощи алгоритма Евклида. Уравнение $ax+by=c$, где a, b и c

известны, а x и y неизвестны, называют *неопределенным уравнением первой степени.* Такое уравнение имеет бесконечное множество решений. Но часто требуется найти лишь целые числа, удовлетворяющие этому уравнению, т. е., как говорят, требуется решить это уравнение в целых числах. При этом рассматривают лишь такие уравнения, у которых a, b, c — целые числа. Уравнение $ax+by=c$ имеет целочисленные решения лишь в том случае, когда c делится на (a, b). Поэтому мы всегда можем считать, что a и b взаимно просты. Тогда общее решение в целых числах рассматриваемого уравнения имеет вид

$$x=(-1)^{n-1}cQ_{n-1}+tQ_n,$$
$$y=(-1)^n cP_{n-1}-tP_n,$$

где t — произвольное целое число, P_{n-1} и Q_{n-1} — числитель и знаменатель предпоследней подходящей дроби в разложении $\frac{a}{b}\equiv\frac{P_n}{Q_n}$ в правильную цепную дробь.

Пример 10. $43x+37y=21$.

$$\begin{array}{r|r|r|l} & & 43 & 37 \\ \hline & 37 & 6 & 1 \\ \hline 6 & 1 & 6 & \\ \hline 0 & 6 & & \end{array} \qquad \frac{43}{37}=1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6}}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{43}{37}$$

$$x=-21\cdot 6+37t=37t-126,$$
$$y=21\cdot 7-43t=147-43t,$$

т. е.

$$x=37t-15,\quad y=18-43t,$$

где снова t — любое целое число.

Подходящие дроби правильной цепной дроби как наилучшие приближения. Пусть мы разложили любое действительное число A в правильную цепную дробь. Обозначим через $\frac{P_n}{Q_n}$ подходящую дробь n-го порядка этой цепной дроби. Тогда имеет место неравенство

$$\left|A-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}.$$

Эти подходящие дроби являются наилучшими приближениями к числу A в том смысле слова, что никакая рациональная дробь со знаменателем, не превышающим Q_n, не может отличаться от A меньше, чем дробь $\frac{P_n}{Q_n}$.

Разложение действительных иррациональных чисел в бесконечные правильные цепные дроби. Всякое действительное иррациональное число можно однозначно представить в виде бесконечной правильной цепной дроби. Обратно, всякая бесконечная правильная цепная дробь (такая цепная дробь обязательно сходится, согласно признаку сходимости Зейделя, см. § 2, п. 2) является разложением одного и только одного иррационального действительного числа.

Периодические правильные цепные дроби. Правильная цепная дробь $q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots$ называется *чисто периодической*, если последовательность ее частных знаменателей q_0, q_1, q_2, представляет собой повторение одного и того же периода из n чисел q_0, q_1, $\ldots$, q_{n-1}.

Если же такое повторение начинается не с q_0, а с некоторого q_k $(k \geqslant 1)$, то правильная цепная дробь называется *смешанной периодической*.

Аналогично вводится понятие периодических цепных дробей и для цепных дробей общего вида, но в теории чисел рассматриваются, главным образом, правильные периодические цепные дроби.

Разложение квадратичных иррациональностей в периодические цепные дроби. Всякая периодическая цепная дробь (не обязательно правильная) представляет квадратичную иррациональность. В теории чисел важную роль играет теорема Лагранжа, утверждающая, что всякая квадратичная иррациональность разлагается в периодическую *правильную* цепную дробь.

Например,

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots,$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} +$$

Заметим, что разложение $\sqrt{13}$ в цепную дробь общего вида

$$\sqrt{13}=3+(\sqrt{13}-3)=3+\frac{4}{3+\sqrt{13}}=$$
$$=3+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+$$

получается проще и сходится быстрее. Поэтому разложение квадратичных иррациональностей в правильные цепные дроби имеет более теоретический, чем практический интерес.

6. Равноценные и соответствующие цепные дроби. Определение равноценных и соответствующих цепных дробей. При преобразовании степенного ряда $A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$ в цепную дробь могут встретиться два случая: 1) подходящие дроби цепной дроби совпадают с частными суммами исходного степенного ряда; 2) эти подходящие дроби не совпадают с частными суммами исходного степенного ряда. В первом случае цепная дробь называется *равноценной* исходному ряду, а во втором случае — *соответствующей* исходному ряду. Разложение n-й подходящей дроби соответствующей цепной дроби в степенной ряд совпадает с исходным степенным рядом до члена с x^n включительно. Ясно, что равноценная цепная дробь является лишь другой формой записи степенного ряда и не дает новых приближенных выражений для его суммы. Напротив, соответствующая цепная дробь имеет своими подходящими дробями дробно-рациональные функции переменного, по степеням которого разложен исходный ряд, и поэтому дает бесконечное множество новых приближенных выражений для его суммы. При этом в отношении сходимости степенной или числовой ряд и соответствующая ему цепная дробь могут вести себя по-разному. Они могут или оба сходиться, или оба расходиться, или же один из них может сходиться, а другой — расходиться. Области сходимости степенного ряда и соответствующей ему цепной дроби могут быть поэтому различными. Существуют, например, степенные ряды с радиусом сходимости, равным нулю, которые можно преобразовать в соответствующие цепные дроби, сходящиеся в довольно широкой области.

С помощью преобразования (5.13) равноценные цепные дроби иногда нетрудно преобразовать в соответствующие.

Так как равноценную дробь гораздо легче построить, чем соответствующую, то применение равноценных дробей для преобразования их в соответствующие представляет практический интерес.

Построение равноценных дробей. Для этой цели проще всего использовать тождество Эйлера

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \frac{c_1 x}{1} \, \frac{c_2 x}{-c_1 + c_2 x} - \frac{c_1 c_3 x}{c_2 + c_3 x} - \ldots - \frac{c_{n-2} c_n x}{c_{n-1} + c_n x} - \ldots \tag{5.16}$$

Этому тождеству можно также придать вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{c_0}{1} - \frac{c_1 x}{c_0 + c_1 x} - \frac{c_0 c_2 x}{c_1 + c_2 x} - \frac{c_1 c_3 x}{c_2 + c_3 x} - \ldots - \frac{c_{n-2} c_n x}{c_{n-1} + c_n x} - \tag{5.17}$$

Пример 11.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots =$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3 - x^2} + \frac{9x^2}{5 - 3x^2} + \quad + \frac{(2n-1)^2 x^2}{2n + 1 - (2n-1) x^2} +$$

В частности, при $x = 1$ имеем

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \frac{7^2}{2} + \quad + \frac{(2n-1)^2}{2} +$$

$$\frac{0}{1} \; \frac{1}{1} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{13}{15} \quad \frac{76}{105} \quad \frac{789}{985} \ldots$$

Последнее разложение впервые получил Брункер (1620—1684 гг.). Это соотношение считается первым по времени разложением трансцендентного числа в цепную дробь.

Применяя к разложению $\operatorname{arctg} x$ в равноценную цепную дробь преобразование (5.13), получим цепную дробь

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{5x^3 - 3x^5}{15 + 9x^2} - \frac{9x^2}{1} - \ldots,$$

$$\frac{x}{1}, \quad \frac{15x + 4x^3 + 3x^5}{15 + 9x^2}, \quad \frac{15x - 5x^3 + 3x^5}{15}$$

которая уже не является равноценной. В частности, при $x = 1$ имеем

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{2}{24 -} \frac{9}{1 -} \frac{25}{152 -} \frac{49}{1 -} \frac{81}{408 - \ldots -} \frac{(4n-1)^2}{1} \frac{(4n+1)^2}{- 8(8n^2+8n+3)}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{22}{24} \quad \frac{13}{15} \quad \frac{1426}{1680} \quad \frac{789}{945} \ldots$$

7. Построение соответствующих дробей. Метод Висковатова. Члены звеньев соответствующей цепной дроби можно выразить через коэффициенты членов исходного степенного ряда, но в полученные при этом соотношения входят определители высоких порядков. Это в большинстве случаев делает такие соотношения практически непригодными. Поэтому на практике лучше применять метод последовательного получения членов звеньев соответствующей цепной дроби из членов степенного ряда. Такой метод был в принципе предложен в начале XIX века русским ученым В. Висковатовым. *Метод Висковатова* приводит к следующему тождеству:

$$f(x) = \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}x + \alpha_{12}x^2 + \alpha_{13}x^3 + \ldots}{\alpha_{00} + \alpha_{01}x + \alpha_{02}x^2 + \alpha_{03}x^3 + \ldots} = \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{00}} + \frac{\alpha_{20}x}{\alpha_{10}} + \frac{\alpha_{30}x}{\alpha_{20}} + \ldots,$$

где

$$\alpha_{mn} = \alpha_{m-1,0}\,\alpha_{m-2,n+1} - \alpha_{m-2,0}\,\alpha_{m-1,n+1}.$$

Вычисления коэффициентов α_{mn} удобно располагать по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{30} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{array}$$

Пример 12. Разложим в цепную дробь выражение $\frac{1-x}{1-5x+6x^2}\left(x < \frac{1}{3}\right)$. Имеем

$$\begin{array}{rrr} 1 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & \\ -4 & 6 & \\ -2 & & \\ -12. & & \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{1-x}{1-5x+6x^2}=\frac{1}{1}-\frac{4x}{1}-\frac{2x}{-4}-\frac{12x}{-2}=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{4x}{1}+\frac{x}{2}-\frac{3x}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{1}\quad\frac{1}{1-4x}\quad\frac{2+x}{2-7x}\quad\frac{2-2x}{2-10x+12x^2}$$

Если при вычислении коэффициентов α_{mn} окажется, что $\alpha_{k0}=0$, то $(k+2)$-я строка схемы получится путем сдвига $(k+1)$-й строки на одно место влево; $(k+3)$-я строка получается комбинацией $(k+2)$-й и k-й по общему правилу, $(k+4)$-я строка — комбинацией $(k+3)$-й и $(k+2)$-й и т. д. Разложение в этом случае имеет вид

$$f(x)=\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{00}}+\frac{\alpha_{20}x}{\alpha_{10}}+\frac{\alpha_{30}x}{\alpha_{20}}+\ldots$$

$$+\frac{\alpha_{k-1,0}x}{\alpha_{k-2,0}}+\frac{\alpha_{k,1}x^2}{\alpha_{k-1,0}}+\frac{\alpha'_{k+1,1}x}{\alpha_{k,1}}+\frac{\alpha'_{k+2,1}x}{\alpha'_{k+1,1}}+$$

Пример 13. Разложим в цепную дробь выражение $\frac{1-3x^3}{1-x^2-4x^4}\left(x^2<\frac{\sqrt{17}-1}{8}\right)$. Имеем

1	0	—1	0	—4
1	0	0	—3	
0	—1	3	—4	
—1	3	—4		
—3	4	3		
—5	15			
25	—15			
300				
—300 · 15.				

$$\frac{1-3x^3}{1-x^2-4x^4}=\frac{1}{1}-\frac{x^2}{1}-\frac{3x}{-1}-\frac{5x}{-3}+\frac{25x}{-5}+\frac{300x}{25}-\frac{15x}{1}=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{x^2}{1}+\frac{3x}{1}-\frac{5x}{3}+\frac{5x}{1}-\frac{12x}{5}-\frac{3x}{1}.$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{1-x^2},\ \frac{1+3x}{1+3x-x^2},\ \frac{3+4x}{3+4x-3x^2+5x^3},\ \frac{3+9x+15x^2}{3+9x+12x^2},\ \frac{15+9x+27x^2}{15+9x+12x^2+36x^3-60x^4},\ \frac{15-45x^3}{15-15x^2-60x^4}.$$

8. **Метод Аппеля.** Аппель в 1913 г. предложил следующий метод, позволяющий разложить любое положительное число в цепную дробь.

Пусть N — любое положительное число. Пусть a есть квадратный корень из N, вычисленный с недостатком с точностью до 1. Тогда $N=a^2+R$, где $0<R<2a+1$. Будем считать $a=0$, если $N<1$. Положим $R=\frac{2a+1}{N_1}$, где $N_1>1$. Пусть a_1 — квадратный корень из N_1, вычисленный с недостатком с точностью до 1. Тогда $N_1=a_1^2+R_1$, где $0<R_1<$ $<2a_1+1$. Положим $R_1=\frac{2a_1+1}{N_2}$ и неограниченно продолжим этот процесс. Вообще говоря, при этом N разлагается в бесконечную цепную дробь.

Если $N_p=N$, то N разлагается *в чистую периодическую цепную дробь*. Если $N_p=N_m$ $(1\leqslant m<p)$, то N разлагается *в смешанную периодическую цепную дробь*.

Пример 14.

$$5=2^2+1=2^2+\frac{5}{5},\quad N_1=N,\quad 5=2^2+\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^2}+\ldots.$$

Пример 15.

$$2=1^2+\frac{3}{3},\quad 3=1^2+\frac{3}{\frac{3}{2}},\quad \frac{3}{2}=1^2+\frac{3}{6},$$

$$6=2^2+\frac{5}{\frac{5}{2}},\quad \frac{5}{2}=1^2+\frac{3}{2};\quad N_5=N.$$

$$2=1^2+\frac{3}{1^2}+\frac{3}{1^2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{1^2}+\underbrace{\frac{3}{1^2}+\frac{3}{1^2}+\ldots}_{\text{второй период}}.$$

Пример 16.

$$\frac{1+\sqrt{13}}{2}=1^2+\frac{3}{1^2}+\frac{3}{1^2}+\frac{3}{1^2}+\ldots\,.$$

Аппель указал и более общее соотношение

$$N=a^n+\frac{(a+1)^n-a^n}{a_1^2}+\frac{(a_1+1)^n-a_1^n}{a_2^2}+\ldots\,.$$

Здесь a_1, a_2, ... — натуральные числа, а a может равняться и нулю. При этом можно брать корень n-й степени из числа с недостатком или с избытком с точностью до 1, или даже различным образом чередовать в получаемом разложении приближения корня с недостатком и с избытком.

§ 2. Основные признаки сходимости цепных дробей

1. Сходимость цепных дробей. Выше было указано, что цепную дробь, у которой $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}$ существует и конечен, называют *сходящейся*. Значение цепной дроби в этом случае принимается равным этому пределу. Но из сходимости цепной дроби еще не следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}$ равен той величине, которую разложили в цепную дробь.

Существенно и несущественно расходящиеся цепные дроби. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=+\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=-\infty$, то цепную дробь называют *несущественно расходящейся*. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}$ не существует, то цепную дробь называют *существенно расходящейся*. Понятия существенной и несущественной расходимости введены Перроном.

Безусловно и условно сходящиеся цепные дроби. Известно, что сходимость рядов и бесконечных произведений не зависит от отбрасывания конечного множества их первых членов. Но у цепных дробей отбрасывание конечного множества звеньев (исключая нулевое звено) может превратить сходящуюся дробь в несущественно расходящуюся. Поэтому Прингсгейм ввел следующее понятие: цепную дробь $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ называют *безусловно сходящейся*, если для всех $m \geqslant 1$ дробь $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_m^\infty$ сходится. Если же хотя бы для одного значения m последняя дробь расходится, то дробь $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ называется *условно сходящейся*. Отсюда вытекает, что для цепных дробей, вообще говоря, нельзя давать признаки сходимости в предельной форме, как это делается для рядов. Условие сходимости, связывающее, например, a_n и b_n, должно выполняться для всех натуральных n. Следует подчеркнуть, что отбрасывание конечного множества звеньев может превратить сходящуюся цепную дробь *только* в сходящуюся или в несущественно расходящуюся.

Необходимый признак сходимости цепной дроби $\left[\frac{1}{a_\nu}\right]_1^\infty$ (теорема Коха). Сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ достаточна для конечности пределов $\lim_{n\to\infty} P_{2n} = P$, $\lim_{n\to\infty} P_{2n+1} = P'$, $\lim_{n\to\infty} Q_{2n} = Q$, $\lim_{n\to\infty} Q_{2n+1} = Q'$ и для выполнения соотношения $P'Q - PQ' = 1$. Отсюда следует, что расходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ *необходима* для сходимости дроби $\left[\frac{1}{a_\nu}\right]_1^\infty$.

Равномерная сходимость цепной дроби. Если члены звеньев цепной дроби являются функциями конечного или бесконечного множества переменных, то эту дробь называют *равномерно сходящейся* на множестве E изменения этих переменных, когда ее подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ в E равномерно стремятся к пределу, т. е. когда можно для любого $\varepsilon > 0$ найти такое число N, что для $n \geqslant N$ *на всем* множестве E число $Q_n \neq 0$ и имеет место неравенство

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \lim_{\lambda\to\infty} \frac{P_\lambda}{Q_\lambda}\right| < \varepsilon. \tag{5.18}$$

Из такого определения следует, что при этом ряд (см. [3])

$$\frac{P_N}{Q_N}+\sum_{\lambda=N+1}^{\infty}\left(\frac{P_\lambda}{Q_\lambda}-\frac{P_{\lambda-1}}{Q_{\lambda-1}}\right)\equiv\frac{P_N}{Q_N}+\sum_{\lambda=N+1}^{\infty}(-1)^{\lambda-1}\frac{a_1a_2\ldots a_\lambda}{Q_{\lambda-1}Q_\lambda} \tag{5.19}$$

равномерно сходится в E к $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}$, так как $\frac{P_n}{Q_n}$ является его частной суммой, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}$ есть его сумма. Обратно из равномерной сходимости этого ряда следует условие (5.18), т. е. равномерная сходимость цепной дроби. Из этого определения вытекает также, что значения цепной дроби и ряда (5.19) совпадают между собой для любого $x \in E$, т. е. что цепная дробь и ряд (5.19) тождественно равны друг другу на множестве E.

Условие сходимости цепной дроби к той функции, которая разложена в эту цепную дробь. Равномерная сходимость цепной дроби

$$\frac{c_1}{1}+\frac{c_2x}{1}+\ldots+\frac{c_nx}{1}+\ldots \qquad (c_n\neq 0;\ n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{5.20}$$

на множестве E достаточна для того, чтобы эта дробь сходилась на множестве E к той функции $K(x)$, которая разложена в эту цепную дробь.

Из этой теоремы следует, что если дробь (5.20) равномерно сходится при $|x|<\rho$, то она сходится при $|x|<\rho$ к регулярной однозначной аналитической функции, которая разложена в эту цепную дробь и которая разлагается в сходящийся при $|x|<\rho$ к той же функции степенной ряд, соответствующий дроби (5.20). Таким образом, получено условие, при котором соответствующие друг другу цепная дробь и степенной ряд сходятся к одной и той же функции. Заметим, что область $|x|<\rho$ можно заменить любой областью T, содержащей внутри себя нулевую точку.

Если же нулевая точка является граничной точкой множества E, то $\rho=0$, т. е. степенной ряд, соответствующий дроби (5.20), расходится всюду, кроме нулевой точки. Но дробь (5.20), равномерно сходящаяся на множестве E, тем не менее сходится на этом множестве к функции, которую мы разложили в эту цепную дробь. Эта функция в данном случае разлагается в окрестности нулевой точки в расходящийся степенной ряд, т. е. не является аналитической. Тем самым подходящие дроби цепной дроби (5.20) являются приближенными выражениями неаналитической функции, что до известной степени разрешает проблему приближенного вычисления неаналитических функций.

Условие тождественного равенства двух равномерно сходящихся цепных дробей. Если значения двух цепных дробей, равномерно сходящихся внутри области T, которая содержит нулевую точку, совпадают между собой в области S, которая целиком содержится внутри T, то эти дроби тождественно равны между собой внутри области T.

Равномерная сходимость дроби $\left[\frac{c_\nu x}{1}\right]_{m+1}^{\infty}$. Равномерная сходимость дроби $\left[\frac{c_\nu x}{1}\right]_{m+1}^{\infty}$ внутри области T, содержащей нулевую точку, достаточна для равномерной сходимости внутри T дроби $K(x)=\left[\frac{c_1}{1};\ \frac{c_\nu x}{1}\right]_2^{\infty}$ за возможным исключением конечного числа точек x' несущественной расходимости. Дробь $\left[\frac{c_1}{1};\ \frac{c_\nu x}{1}\right]_2^{\infty}$ сходится при этом внутри T к однозначной аналитической функции $K(x)$, регулярной внутри T, кроме точек x', являющихся полюсами этой функции.

2. Необходимый и достаточный признак сходимости цепной дроби с положительными членами звеньев (признак Зейделя). Как было показано, расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *необходима* для сходимости дроби $\left[\frac{1}{a_n}\right]_1^{\infty}$ Зейдель и независимо от него Штерн доказали, что если все члены звеньев этой дроби положительны, то расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *необходима и достаточна* для ее сходимости.

Пример 17. Цепная дробь

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+$$

сходится в силу признака Зейделя, так как ряд $2+2+\ldots$ расходится.

Заметим, что сходимость цепной дроби с положительными членами звеньев зависит от расходимости некоторого ряда, т. е. от поведения всей совокупности членов звеньев, а не от каждого из них. Поэтому сходящаяся цепная дробь с положительными членами звеньев сходится безусловно.

При переходе от цепной дроби вида (5.6) к цепной дроби общего вида (5.1) получается следующая формулировка признака Зейделя, предложенная Штерном.

Расходимость по крайней мере одного из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2n}} b_{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2n}}{a_1 a_3 \ldots a_{2n+1}} b_{2n+1} \tag{5.21}$$

необходима и достаточна для сходимости цепной дроби (5.1), все члены звеньев которой положительны.

3. Достаточные признаки сходимости цепных дробей с положительными членами звеньев. Установить расходимость одного из рядов (5.21) на практике довольно трудно. Поэтому нередко удобнее пользоваться различными достаточными признаками сходимости цепных дробей с положительными членами звеньев. Ниже приведены некоторые из таких признаков.

1°. Расходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{b_{n-1} b_n}{a_n}$ достаточна для сходимости дроби (5.1) с положительными членами звеньев (Штольц).

2°. Расходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{b_{n-1} b_n}{a_n}}$ достаточна для сходимости дроби (5.1) с положительными членами звеньев (Заальшюц и Прингсгейм).

3°. Расходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{a_n}{b_{n-1} b_n}}$$

достаточна для сходимости дроби (5.1) с положительными членами звеньев (Арндт).

Заметим, что если

$$K = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \quad + \frac{a_n}{b_n} + \ldots,$$

то

$$-K = -b_0 + \frac{a_1}{-b_1} + \frac{a_2}{-b_2} + \quad + \frac{a_n}{-b_n} +$$

Поэтому все признаки сходимости цепных дробей с положительными членами звеньев легко распространить на цепные дроби, у которых все частные числители положительны, а все частные знаменатели отрицательны.

4. Первая серия достаточных признаков сходимости. Пусть числа r_1, r_2, удовлетворяют следующим условиям (Скотт и Уолл):

$$\left.\begin{aligned} &1)\ r_1|1+c_2| \geqslant |c_2|, \\ &2)\ r_2|1+c_2+c_3| \geqslant |c_3|, \\ &3)\ r_n|1+c_n+c_{n+1}| \geqslant r_n r_{n-2}|c_n| + |c_{n+1}| \qquad (n \geqslant 3), \\ &4)\ r_n \geqslant 0 \qquad (n \geqslant 3). \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

Под c_2, c_3, понимаются частные числители дроби

$$K = \frac{1}{1} + \frac{c_2}{1} + \frac{c_3}{1} + \quad + \frac{c_n}{1} + \tag{5.23}$$

Если числа r_1, r_2, удовлетворяют условиям (5.22) и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_1 r_2 \ldots r_n$ сходится, то дробь (5.23) сходится, причем выполняется неравенство

$$|K| \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_1 r_2 \ldots r_n. \tag{5.24}$$

Если числа r_1, r_2, удовлетворяют условиям (5.22) и по крайней мере один из c_n равен нулю, то дробь (5.23) сходится.

Если c_1, c_2, ... — функции некоторых переменных, то сформулированный выше признак сходимости примет следующий вид. Если числа $r_1, r_2,$ удовлетворяют условиям (5.22) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_1 r_2 \ldots r_n$ сходится на множестве E, то дробь (5.23) равномерно сходится на множестве E, причем выполняется неравенство (5.24).

В частности, множество E можно выбрать на основании следующей теоремы Скотта и Уолла:

Совокупность условий

$$p_1 > 1, \ |c_n| \leqslant \frac{p_n - 1}{p_{n-1} p_n} \qquad (n = 2, 3, \ldots), \qquad (5.25)$$

где p_1, p_2 — члены некоторой числовой последовательности, достаточна для равномерной сходимости дроби (5.23) и для выполнения неравенства

$$K| \leqslant \frac{p_1}{p_1 - 1}\left[1 - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_n - 1)}\right]. \qquad (5.26)$$

Неравенство (5.26) переходит в равенство, если $c_n = \frac{1 - p_n}{p_{n-1} p_n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Если $p_1 = 1$, то теорема Скотта и Уолла примет следующий вид. Пусть выполняются условия:

1) $p_1 = 1$,

2) $|c_n| \leqslant \frac{p_n - 1}{p_{n-1} p_n}$ $\quad (n = 2, 3, \ldots)$,

3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(p_2 - 1)(p_3 - 1)\ldots(p_{n+1} - 1)$ сходится.

Совокупность этих условий достаточна для равномерной сходимости дроби (5.23) и для выполнения неравенства

$$|K| \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_2 - 1)(p_3 - 1)\ldots(p_{n+1} - 1).$$

Это неравенство переходит в равенство, если $c_n = \frac{1 - p_n}{p_{n-1} p_n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

В частности, если $p_n = \frac{2n + 1}{n + k}$, то на основании соотношений (5.25) и (5.26) имеем следующую теорему.

Условие

$$|c_n| \leqslant \frac{n^2-(k-1)^2}{4n^2-1} \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots) \qquad (5.27)$$

достаточно для равномерной сходимости дроби (5.20), причём при $k \neq 2$ имеет место оценка

$$|K| \leqslant \frac{3}{2-k}\left[1-\frac{1}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2-k}{1+k}\,\frac{3-k}{2+k}\cdots\frac{n+1-k}{n+k}}\right]. \qquad (5.28)$$

Исследование ряда, стоящего в знаменателе правой части последнего неравенства, показывает, что этот ряд сходится при $k>1$ и расходится при $k \leqslant 1$. Кроме того, из неравенства (5.27) следует, что $-1<k<3$. Поэтому оценка (5.28) при $-1<k\leqslant 1$ имеет вид

$$|K| \leqslant \frac{3}{2-k} \qquad (5.29)$$

и лишь при $1<k<3$ сохраняет вид (5.28).

Признак Ворпицкого. При $k=\frac{1}{2}$ имеем $p_n=2$. В этом случае условие (5.27) примет вид

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{4} \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots), \qquad (5.30)$$

причем согласно оценке (5.29) $|K| \leqslant 2$. Однако эту оценку можно заменить более точной

$$\left|K-\frac{4}{3}\right| \leqslant \frac{2}{3}. \qquad (5.31)$$

Теорема Ван Флека. Условие

$$0 \leqslant c_n \leqslant g \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots) \qquad (5.32)$$

достаточно для того, чтобы дробь $K=\left[\frac{1}{1},\ \frac{c_n z}{1}\right]_2^{\infty}$ сходилась в круге $|z|<\frac{1}{4g}$ к регулярной аналитической нерациональной функции, которая также равна ряду, соответствующему этой дроби, причем $\left|K-\frac{4}{3}\right| \leqslant \frac{2}{3}$.

Доказательство этой теоремы вытекает из признака Ворпицкого.

5. Признаки сходимости предельно-периодических цепных дробей. Цепную дробь $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, у которой $a_\nu \neq 0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = b$, называют *предельно-периодической*. Такие дроби имеют большое прикладное значение, так как они связаны с разложениями многих распространенных функций в цепные дроби.

Признаки сходимости предельно-периодических цепных дробей вытекают из следующей теоремы:

Условие $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sup\{|c_\nu|\} \leqslant g$ достаточно для того, чтобы дробь

$$\left[\frac{c_1}{1};\ \frac{c_\nu z}{1}\right]_2^\infty \tag{5.33}$$

сходилась в круге $|z| < \frac{1}{4g}$ (исключая могущие там быть полюсы) к регулярной аналитической нерациональной функции, причем полюсы последней являются точками несущественной расходимости дроби (5.33). В окрестности нулевой точки эта функция равна ряду, соответствующему цепной дроби (5.33).

Выбрав в этой теореме в качестве g любое сколь угодно малое положительное число, приходим к следующей теореме.

Условие $\lim\limits_{\nu\to\infty} c_\nu = 0$ достаточно для того, чтобы дробь (5.33) равномерно сходилась в любой конечной области плоскости комплексного переменного z, за исключением конечного множества точек несущественной расходимости, к аналитической функции, которая регулярна в окрестности нулевой точки, а в остальной части области регулярна, за исключением указанных точек несущественной расходимости дроби (5.33), которые являются полюсами функции. Точка $z = \infty$ является существенно особой точкой этой функции.

Для обобщения этой теоремы предположим, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} c_\nu = c \neq 0$. Тем самым придем к следующей теореме.

Условие $\lim\limits_{\nu\to\infty} c_\nu = c \neq 0$ достаточно для равномерной сходимости дроби (5.33), за исключением конечного множества точек несущественной расходимости в любой области $T \subset \overline{T}$, где $\overline{T}$ есть плоскость комплексного переменного z с разрезом по действительной оси от точки $\left(-\frac{1}{4c}, 0\right)$ до бесконечно удаленной точки, не проходящим через нулевую точку.

Если же этот разрез начинается от нулевой точки, то имеет также место следующий *признак Стилтьеса*. Пусть выполняются условия:

1) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ действительны и неотрицательны,

2) $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n+1}$, не все равны нулю,

3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ расходится.

Совокупность этих условий достаточна для равномерной сходимости дроби $\left[\frac{z}{\alpha_k}\right]_1^\infty$ в любой конечной области, лежащей внутри плоскости комплексного переменного z, разрезанной по отрицательной части действительной оси.

§ 3. Разложение некоторых функций в цепные дроби

1. Метод Лагранжа. Лагранж предложил следующий способ решения дифференциальных уравнений с помощью цепных дробей. Пусть дано дифференциальное уравнение, связывающее y с x. Пусть $y \approx \xi_0$, когда $|x| \approx 0$. Положим тогда $y = \frac{\xi_0}{1+y_1}$ и подставим это соотношение в исходное уравнение. Получим дифференциальное уравнение, связывающее y_1 с x. Пусть $y_1 \approx \xi_1$ при $|x| \approx 0$. Положим $y_1 = \frac{\xi_1}{1+y_2}$ и повторим тот же процесс. В итоге мы придем к решению исходного уравнения в виде цепной дроби $\left[\frac{\xi_n}{1}\right]_1^\infty$; ξ_n удобнее искать в виде $a_n x^{\nu_n}$, где $\nu_n \geqslant 0$.

Таким приемом можно решить многие дифференциальные уравнения. Но при этом обычно бывает трудно найти зависимость ξ_n от индекса n, т. е. найти общее звено цепной дроби.

2. Основное дифференциальное уравнение. Применим метод Лагранжа к уравнению

$$(\alpha + \alpha' x) x y' + (\beta + \beta' x) y + \gamma y^2 = \delta x, \qquad y(0) = 0. \qquad (5.34)$$

Положив $y = \dfrac{\delta x}{\alpha + \beta + y_1}$, приведем это уравнение к виду

$$(\alpha + \alpha' x) x y' + [\alpha + \beta - (\alpha' + \beta') x] y_1 + y_1^2 = \\ = [(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') + \gamma\delta] x.$$

Повторяя этот процесс, получим цепную дробь

$$y = \frac{\delta x}{\alpha + \beta +} \, \frac{[(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') + \gamma\delta] x}{2\alpha + \beta} + \frac{(\alpha\alpha' - \alpha\beta' + \alpha'\beta + \gamma\delta) x}{3\alpha + \beta} + \ldots \\ \ldots + \frac{[(n\alpha + \beta)(n\alpha' + \beta') + \gamma\delta] x}{2n\alpha + \beta} + \frac{(n^2\alpha\alpha' - n\alpha\beta' + n\alpha'\beta + \gamma\delta) x}{(2n+1)\alpha + \beta} + \ldots$$

Отсюда нетрудно заметить, что дифференциальное уравнение

$$(\alpha + \alpha' x^k) x y' + (\beta + \beta' x^k) y + \gamma y^2 = \delta x^k, \qquad y(0) = 0 \tag{5.35}$$

имеет решение

$$y = \frac{\delta x^k}{k\alpha + \beta +} \, \frac{[(k\alpha + \beta)(k\alpha' + \beta') + \gamma\delta] x^k}{2k\alpha + \beta} + \\ + \frac{(k^2\alpha\alpha' - k\alpha\beta' + k\alpha'\beta + \gamma\delta) x^k}{3k\alpha + \beta} + \ldots \\ + \frac{[(nk\alpha + \beta)(nk\alpha' + \beta') + \gamma\delta] x^k}{2nk\alpha + \beta} + \\ + \frac{(n^2k^2\alpha\alpha' - nk\alpha\beta' + nk\alpha'\beta + \gamma\delta) x^k}{(2n+1) k\alpha + \beta} + \tag{5.36}$$

Почти все дифференциальные уравнения, решения которых были разложены в цепные дроби Лагранжем, Эйлером и другими математиками, являются частными случаями уравнения (5.35). Естественно поэтому назвать уравнение (5.35) *основным дифференциальным уравнением.*

3. Разложение степенной функции в цепную дробь. Положим $y = (1 + x)^\nu$, где ν — любое действительное число. Тогда $(1 + x) y' = \nu y$, $y(0) = 1$. Положив $y = 1 + \dfrac{\nu x}{1 + z}$, приведем дифференциальное уравнение к виду

$$(1 + x) x z' + [1 - (1 - \nu) x] z + z^2 = (1 - \nu) x, \qquad z(0) = 0.$$

Это частный случай уравнения (5.35), в котором положено

$$k = \alpha = \alpha' = \beta = \gamma = 1, \quad \beta' = -(1 - \nu), \quad \delta = 1 - \nu.$$

Отсюда и из разложения (5.36) имеем

$$(1+x)^{\nu}=1+\frac{\nu x}{1+}\frac{(1-\nu)x}{2}+\frac{(1+\nu)x}{3}+$$
$$+\frac{(2-\nu)x}{2}+\quad+\frac{(n-\nu)x}{2}+\frac{(n+\nu)x}{2n+1}+ \tag{5.37}$$

Это разложение было получено Лагранжем. В силу вышеуказанных признаков сходимости оно сходится на плоскости комплексного переменного x, разрезанной по действительной оси от $x=-\infty$ до $x=-1$.

Степенной ряд, в который разлагается функция $y=(1+x)^{\nu}$, сходится в открытом круге радиуса 1 с центром в нулевой точке. Таким образом, разложение функции $y=(1+x)^{\nu}$ в цепную дробь сходится в гораздо более широкой области, чем разложение той же функции в степенной ряд.

Пример 18. Положив $x=1$, $\nu=\frac{1}{3}$, имеем

$$\sqrt[3]{2}=1+\frac{1}{3+}\frac{2}{2+}\frac{4}{9+}\frac{5}{2}+\ldots+\frac{3n-1}{2}+\frac{3n+1}{3(2n+1)}+$$
$$\frac{1}{1}\quad\frac{4}{3}\quad\frac{10}{8}\quad\frac{106}{84}$$

Сжав разложение (5.37) по формуле (5.9), получим

$$(1+x)^{\nu}=1+\frac{2\nu x}{2+(1-\nu)x-}\frac{(1-\nu^2)x^2}{3(2+x)}-$$
$$-\frac{(4-\nu^2)x^2}{5(2+x)}-\quad-\frac{(n^2-\nu^2)x^2}{(2n+1)(2+x)}-$$

Это разложение сходится в той же области, что и разложение (5.37).

Для разложения квадратичных иррациональностей в цепные дроби существует следующий элементарный способ.

Пусть $\sqrt{x}\approx a$. Тогда $\sqrt{x}=a+(\sqrt{x}-a)=a+\frac{x-a^2}{a+\sqrt{x}}$.

Следовательно,

$$\sqrt{x}=a+\frac{x-a^2}{2a}+\frac{x-a^2}{2a}+$$

Это разложение сходится на плоскости комплексного переменного x, кроме отрицательной части действительной оси.

4. Разложение логарифмической функции в цепную дробь. Разложению (5.37) можно придать вид

$$\frac{(1+x)^{\nu}-1}{\nu}=\frac{x}{1\,+}\,\frac{(1-\nu)\,x}{2\,+}\,\frac{(1+\nu)\,x}{3\,+}\,\frac{(2-\nu)\,x}{2\,+}\,\frac{(2+\nu)\,x}{5\,+}\,\ldots\,+\,\frac{(n-\nu)\,x}{2\,+}\,\frac{(n+\nu)\,x}{2n+1\,+}\,\ldots$$

Полагая $\nu=0$, получим, так как $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{(1+x)^{\nu}-1}{\nu}=\ln(1+x)$,

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1\,+}\,\frac{x}{2\,+}\,\frac{x}{3\,+}\,\frac{2x}{2\,+}\,\frac{2x}{5\,+}\,\ldots\,+\,\frac{nx}{2\,+}\,\frac{nx}{2n+1\,+}\,\ldots \tag{5.38}$$

Это разложение и способ его получения из разложения (5.37) были найдены Лагранжем. Разложение (5.38) сходится на плоскости комплексного переменного x, разрезанной по действительной оси от $x=-\infty$ до $x=-1$.

Пример 19. Положив $x=1$, имеем

$$\ln 2=\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{2\,+}\,\frac{1}{3\,+}\,\ldots\,+\,\frac{n}{2\,+}\,\frac{n}{2n+1\,+}\,\ldots$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{1}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{7}{10}\ldots$$

5. Разложение показательной функции в цепную дробь. При замене x на $\frac{x}{\nu}$ разложение (5.37) примет вид

$$\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu}=1+\frac{x}{1\,+}\,\frac{\frac{1-\nu}{\nu}\,x}{2\,+}\,\frac{\frac{1+\nu}{\nu}\,x}{3\,+}\,\frac{\frac{2-\nu}{\nu}\,x}{2\,+}\,\frac{\frac{2+\nu}{\nu}\,x}{5\,+}\,\ldots\,+\,\frac{\frac{n-\nu}{\nu}\,x}{2\,+}\,\frac{\frac{n+\nu}{\nu}\,x}{2n+1\,+}\,\ldots$$

Устремив ν к ∞, получим в пределе

$$e^{x}=1+\frac{x}{1\,-}\,\frac{x}{2\,+}\,\frac{x}{3\,-}\,\frac{x}{2\,+}\,\frac{x}{5\,-}\,\ldots\,-\,\frac{x}{2\,+}\,\frac{x}{2n+1\,-}\,\ldots \tag{5.39}$$

Это разложение сходится на всей плоскости комплексного переменного x. Оно и способ его получения из разложения (5.37) были найдены Лагранжем. Сжав цепную дробь (5.39) по формуле (5.9), придем к разложению, полученному Эйлером:

$$e^x = 1 + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \quad + \frac{x^2}{2(2n+1)} +$$

Это разложение также сходится на всей плоскости комплексного переменного x.

6. Разложение функции $y = \operatorname{arctg} x$ в цепную дробь. Дифференциальное уравнение для этой функции имеет вид

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) = 0.$$

Положив $y = \frac{x}{1+z}$, приведем это уравнение к виду

$$(1+x^2)\,xz' + (1-x^2)\,z + z^2 = x^2.$$

Это частный случай уравнения (5.35), в котором положено

$$\alpha = \alpha' = \beta = \gamma = \delta = 1, \quad \beta' = -1, \quad k = 2.$$

Поэтому из разложения (5.36) имеем

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+z} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{4x^2}{5} + \frac{9x^2}{7} + \ldots + \frac{n^2x^2}{2n+1} + \ldots \tag{5.40}$$

Это разложение было найдено Ламбертом (1728—1777 гг.). Оно сходится на всей плоскости комплексного переменного x, за исключением двух разрезов по мнимой оси от $-\infty i$ до $-i$ и от i до $+\infty i$. Таким образом, это разложение сходится в гораздо более широкой области, чем степенной ряд, в который разлагается функция $y = \operatorname{arctg} x$ (этот ряд сходится внутри круга единичного радиуса с центром в нулевой точке).

Члены звеньев цепной дроби (5.40) удовлетворяют условиям (5.14). Отсюда на основании равенства (5.15) можно получить еще одно разложение для $\operatorname{arctg} x$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{5} + \frac{4x^2}{7} + \quad + \frac{(2n+1)^2\,x^2}{4n+1} + \\ + \frac{(2n)^2x^2}{4n+3} +$$

7. Разложение функции $y=\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^k}$ в цепную дробь.

Дифференциальное уравнение для этой функции имеет вид

$$y'=\frac{1}{1+x^k}, \quad y(0)=0.$$

Положив

$$y=\frac{x}{1+z},$$

приведем это уравнение к виду

$$(1+x^k)\,xz'+(1-x^k)\,z+z^2=x^k.$$

Это частный случай уравнения (5.35), в котором положено $\alpha=\alpha'=\beta=\gamma=\delta=1$, $\beta'=-1$, k является любым числом. Поэтому из разложения (36) имеем

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^k}=\frac{x}{1}+\frac{x^k}{k+1}+\frac{k^2x^k}{2k+1}+\frac{(k+1)^2\,x^k}{3k+1}+\ldots$$

$$+\frac{n^2k^2x^k}{2nk+1}+\frac{(nk+1)^2x^k}{(2n+1)\,k+1}+\ldots \tag{5.41}$$

Это разложение было получено Лагранжем. Оно сходится на плоскости комплексного переменного x^k, разрезанной по действительной оси от $-\infty$ до -1. При $k=1$ разложение (5.41) переходит в разложение для $\ln(1+x)$, при $k=2$ — в разложение для $\operatorname{arctg} x$.

Заменив в интеграле $\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^k}$ величину x через x^{p+1} и положив $k(p+1)=q$, получим из равенства (5.41) разложение

$$\int\limits_0^x \frac{t^p\,dt}{1+t^q}=\frac{x^{p+1}}{p+1}+\frac{(p+1)^2\,x^q}{q+1+p}+\frac{q^2x^q}{2q+1+p}+\ldots$$

$$+\frac{n^2q^2x^q}{2nq+1+p}+\frac{(nq+1+p)^2x^q}{(2n+1)\,q+1+p}+\ldots \tag{5.42}$$

Например,

$$\int_0^x \frac{t^2\,dt}{1+t^4}=\frac{1}{3}+\frac{9}{7}+\frac{16}{11}+\frac{49}{15}+\ldots+\frac{16n^2}{8n+3}+\frac{(4n+3)^2}{8n+7}+\ldots$$

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{3}\ \ \frac{7}{30}\ \ \frac{93}{378}\ \ \frac{1738}{7140}$$

Пользуясь условиями (5.14) и равенством (5.15), можем придать разложению (5.42) следующий вид

$$\int_0^x \frac{t^p\,dt}{1+t^q}=\frac{x^{p+1}}{p+1}-\frac{x^{p+1+q}}{q+1+p}+\frac{(q+1+p)^2\,x^q}{2q+1+p}+$$

$$+\frac{q^2x^q}{3q+1+p}+\ldots+\frac{(nq+1+p)^2x^q}{2nq+1+p}+\frac{n^2q^2x^q}{(2n+1)q+1+p}+\ldots$$

Например,

$$\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{1+t^4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{49}{11}+\frac{16}{15}+\ldots$$

$$\frac{1}{3}\ \ \frac{4}{21}\ \ \frac{93}{378}\ \ \frac{1459}{6006}$$

$$+\frac{(4n+3)^2}{8n+3}+\frac{16n^2}{8n+7}+$$

8. Разложение для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{th} x$ в цепную дробь. Дифференциальное уравнение для $y=\operatorname{tg} x$ имеет вид

$$y'=1+y^2,\quad y(0)=0.$$

Положив $y=\frac{x}{1+z}$, приведем это уравнение к виду

$$xz'+z+z^2=-x^2.$$

Это — частный случай уравнения (5.35), в котором положено $\alpha'=\beta'=0$, $\alpha=\beta=\gamma=1$, $\delta=-1$, $k=2$. Поэтому из разложения (5.36) имеем

$$\operatorname{tg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{5}-\ldots-\frac{x^2}{2n+1}-\qquad(5.43)$$

Это разложение было найдено Ламбертом. Оно сходится на всей плоскости комплексного переменного x, за исключением тех точек, в которых $\operatorname{tg} x$ обращается в ∞.

Заменив в разложении (5.43) x через $\frac{x}{i}$ и умножив полученное равенство на i, будем иметь

$$\operatorname{th} x = \frac{x}{1} \underset{+}{} \frac{x^2}{3} \underset{+}{} \frac{x^2}{5} \underset{+}{} \quad \underset{+}{} \frac{x^2}{2n+1} \underset{+}{} \qquad (5.44)$$

9. Разложение функции Прима в цепную дробь. *Функцией Прима* называется интеграл

$$\int\limits_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt \qquad (a > 0,\ x > 0).$$

Введем функцию

$$y = x^{1-a}e^x \int\limits_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt.$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy' - (1 - a + x)\,y = -x.$$

Положив $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{1}{1+u}$, придадим этому уравнению вид

$$t^2u' + [1 - (1-a)\,t]\,u + u^2 = (1-a)\,t, \quad u(0) = 0.$$

Это — частный случай уравнения (5.35), в котором положено $\alpha = 0$, $k = \alpha' = \beta = \gamma = 1$, $\beta' = -(1-a)$, $\delta = 1 - a$. Поэтому из разложения (5.36) имеем

$$u = \frac{(1-a)\,t}{1} \underset{+}{} \frac{t}{1} \underset{+}{} \frac{(2-a)\,t}{1} \underset{+}{} \dots \underset{+}{} \frac{nt}{1} \underset{+}{} \frac{(n+1-a)\,t}{1} \underset{+}{} \dots$$

Переходя к первоначальным обозначениям, получим

$$\int\limits_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt = \frac{x^a e^{-x}}{x} \underset{+}{} \frac{1-a}{1} \underset{+}{} \frac{1}{x} \underset{+}{} \frac{2-a}{1} \underset{+}{} \dots \underset{+}{} \frac{n}{x} \underset{+}{} \frac{n+1-a}{1} \underset{+}{} \dots \qquad (5.45)$$

Сжимая это разложение на основании формулы (5.9), будем иметь

$$\int\limits_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt = \frac{x^a e^{-x}}{x+1-a} - \frac{1-a}{x+3-a} - \frac{2(2-a)}{x+5-a} - \ldots - \frac{n(n-a)}{x+2n+1-a} - \ldots \tag{5.46}$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$ называют *интегральной показательной функцией* и обозначают через $\mathrm{Ei}(x)$ (см. (6.393)). Из разложения (5.45) получим при $a=0$ и $x<0$

$$\mathrm{Ei}(x) = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1} - \frac{1}{x} - \ldots - \frac{n}{1} - \frac{n}{x} - \ldots\right). \tag{5.47}$$

Функцию

$$\mathrm{Ei}(\ln x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

называют *интегральным логарифмом* и обозначают через $\mathrm{li}(x)$ (см. (6.394)). Из разложения (5.47) получим

$$\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{1} - \frac{1}{\ln x} - \ldots - \frac{n}{1} - \frac{n}{\ln x} - \ldots$$

10. Разложение неполной гамма-функции в цепную дробь. Для получения разложения *неполной гамма-функции*, т. е. интеграла

$$\int\limits_0^x t^{a-1}e^{-t}\,dt \qquad (a>0),$$

введем функцию

$$y = x^{-a}e^x \int\limits_0^x t^{a-1}e^{-t}\,dt \qquad (x>0),$$

удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$xy' + (a-x)\,y - 1 = 0, \quad y(0) = \frac{1}{a}.$$

Положив в этом уравнении $y=\frac{1}{a+y_1}$, получим

$$xy_1'+(a+x)\,y_1+y_1^2=-ax.$$

Это — частный случай уравнения (5.35), в котором положено $k=\alpha=\beta'=\gamma=1$, $\alpha'=0$, $\beta=a$, $\delta=-a$. Поэтому из разложения (5.36) имеем

$$\int\limits_0^x t^{a-1}e^{-t}\,dt=\frac{x^ae^{-x}}{a\;-}\,\frac{ax}{1+a\;+}\,\frac{x}{2+a\;-}\,\frac{(1+a)\,x}{3+a\;+}$$
$$+\frac{2x}{4+a\;-}\quad+\frac{nx}{2n+a\;-}\,\frac{(a+n)\,x}{2n+1+a\;+}$$

11. Формула Тиле. Ряду Тейлора

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+$$
$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+$$

в теории цепных дробей соответствует *формула Тиле*

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{rf(x)\;+}\,\frac{h}{2rr_1f(x)\;+}\,\frac{h}{3rr_2f(x)\;+}$$
$$+\frac{h}{nrr_{n-1}f(x)\;+}\,\ldots$$

Здесь $r_nf(x)$ называется *обратной производной* n-го порядка от функции $f(x)$. Обратные производные определяются соотношениями

$$rf(x)=\frac{1}{f'(x)},\quad r_2f(x)=f(x)+2rr_1f(x),$$

и вообще при $n\geqslant 2$

$$r_nf(x)=r_{n-2}f(x)+nrr_{n-1}f(x).$$

Например,

$$re^x=e^{-x},\; r_2e^x=-e^x,\;\ldots,\; r_{2n}e^x=(-1)^ne^x,$$
$$r_{2n+1}e^x=(-1)^n(n+1)\,e^x.$$

Отсюда

$$(2n+1)\,rr_{2n}e^x=(-1)^n(2n+1)\,e^{-x},$$
$$(2n+2)\,rr_{2n+1}e^x=2\,(-1)^{n+1}\,e^x.$$

При помощи этих соотношений, заменив в формуле Тиле x через 0 и h через x, вновь получим разложение (5.39).

Таким образом, формула Тиле также является источником получения разложений различных функций в соответствующие цепные дроби.

12. Дробно-рациональные приближения для $\sin x$ и $\operatorname{sh} x$. Общий вид разложения в цепную дробь $\sin x$ неизвестен. По методу Висковатова можно найти лишь конечное множество звеньев такого разложения. Например,

$$\begin{array}{llllll}
\sin x = \dfrac{x}{1} + & \dfrac{x^2}{6} - & \dfrac{7x^2}{10} + & \dfrac{11x^2}{98} - & \dfrac{551x^2}{198} + & \\
\dfrac{x}{1} & \dfrac{6x}{6+x^2} & \dfrac{60x-7x^3}{60+3x^2} & \dfrac{5880x-620x^3}{5880+360x^2+11x^4} & &
\end{array}$$

и

$$\begin{array}{llllll}
\sin x = x - & \dfrac{x^3}{6} + & \dfrac{3x^2}{10} - & \dfrac{11x^2}{42} + & \dfrac{25x^2}{66} - & \\
\dfrac{x}{1} & \dfrac{6x-x^3}{6} & \dfrac{60x-7x^3}{60+3x^2} & \dfrac{2520x-360x^3+11x^5}{2520+60x^2} & &
\end{array}$$

Из приближения

$$\sin x \approx \frac{60x-7x^3}{60+3x^2} \tag{5.48}$$

следует, что $\sin\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7071$, если положить $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$. Таким образом, в силу периодичности функции $y = \sin x$ и соотношений $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ и $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ приближение (5.48) позволяет при помощи арифмометра вычислить четырехзначную таблицу этой функции. Пользуясь подходящими дробями более высоких порядков, можно таким же образом получить при помощи арифмометра таблицы функции $y = \sin x$ с любым количеством верных десятичных знаков.

Так как $\operatorname{sh} x = -i \sin ix$, то из полученных разложений для $\sin x$ имеем следующие разложения для $\operatorname{sh} x$:

$$\operatorname{sh} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{7x^2}{10 - \cfrac{11x^2}{98 + \cfrac{551x^2}{198 - \dotsb}}}}}$$

$$\frac{x}{1} \quad \frac{6x}{6 - x^2} \quad \frac{60x + 7x^3}{60 - 3x^2} \quad \frac{5880x + 620x^3}{5880 - 360x^2 + 11x^4} \quad \dots$$

и

$$\operatorname{sh} x = x + \cfrac{x^3}{6 - \cfrac{3x^2}{10 + \cfrac{11x^2}{42 - \cfrac{25x^2}{66 + \dotsb}}}}$$

$$\frac{x}{1} \quad \frac{6x + x^3}{6} \quad \frac{60x + 7x^3}{60 - 3x^2} \quad \frac{2520x + 360x^2 + 11x^5}{2520 - 60x^2}$$

13. Дробно-рациональные приближения для $\cos x$ и $\operatorname{ch} x$. Общий вид разложения в цепную дробь $\cos x$ неизвестен. По методу Висковатова можно найти лишь конечное множество звеньев такого разложения. Например,

$$\cos x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{2 - \cfrac{5x^2}{6 + \cfrac{3x^2}{50 - \cfrac{313x^2}{126 + \dotsb}}}}}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{2 + x^2} \quad \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} \quad \frac{600 - 244x^2}{600 + 56x^2 + 3x^4} \quad \dots$$

и

$$\cos x = 1 - \cfrac{x^2}{2 + \cfrac{x^2}{6 - \cfrac{3x^2}{10 + \cfrac{13x^2}{126 - \dotsb}}}}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2 - x^2}{2} \quad \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} \quad \frac{120 - 56x^2 + 3x^4}{120 + 4x^2} \quad \dots$$

Отсюда, так как $\operatorname{ch} x = \cos ix$, получим следующие разложения:

$$\operatorname{ch} x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x^2}{2 + \cfrac{5x^2}{6 - \cfrac{3x^2}{50 + \cfrac{313x^2}{126 - \dotsb}}}}}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{2 - x^2} \quad \frac{12 + 5x^2}{12 - x^2} \quad \frac{600 + 244x^2}{600 - 56x^2 + 3x^4} \quad \dots$$

и

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{3x^2}{10} - \frac{13x^2}{126} + \ldots$$
$$\frac{1}{1} \quad \frac{2+x^2}{2} \quad \frac{12+5x^2}{12-x^2} \quad \frac{120+56x^2+3x^4}{120-4x^2} \quad \ldots$$

14. Дробно-рациональное приближение для интеграла вероятности. Общий вид разложения в цепную дробь *интеграла вероятности* $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ неизвестен. По методу Висковатова можно найти лишь конечное множество звеньев такого разложения. Например,

$$\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{10} + \frac{39x^2}{7} - \frac{739x^2}{234} + \ldots$$
$$\frac{x}{1} \quad \frac{3x}{3+x^2} \quad \frac{30x-x^3}{30+9x^2} \quad \frac{210x+110x^3}{210+180x^2+39x^4}$$

15. Обращение ряда Стирлинга в цепную дробь. Возьмем ряд *Стирлинга* (см. (6.509) и (6.516)):

$$\ln\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{2}\ln 2\pi + J(x),$$

где

$$J(x) = \frac{B_2}{1\cdot 2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + \ldots + \frac{B_{2n}}{(2n-1)\,2nx^{2n-1}} + \ldots$$

а $B_2, B_4, \ldots$ — числа Бернулли (см. гл. VI, § 2, п. 1, 1°):

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \ldots$$

Пользуясь методом Висковатова, можно обратить ряд Стирлинга в цепную дробь, общее звено которой неизвестно,

$$\ln\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{2}\ln 2\pi +$$
$$+ \frac{1}{12x} + \frac{2}{5x} + \frac{53}{42x} + \frac{1170}{53x} + \frac{22999}{429x} + \ldots$$

16. Дробно-рациональное приближение для гамма-функции. Если в разложении гамма-функции

$$\Gamma(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

где

$$c_0=1, \quad c_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k c_{n-k}s_k, \quad s_k=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^k} \quad (k\geqslant 2),$$

$s_1=C\approx 0{,}57722$ (постоянная Эйлера, см. (6.56)), вычислить коэффициенты, то получим приближенно

$$\Gamma(1+x)\approx 1-0{,}57722x+0{,}98906x^2-0{,}90748x^3+ \\ +0{,}98173x^4-\ldots$$

Применив к этому приближению метод Висковатова, будем иметь, в частности,

$$\Gamma(1+x)\approx\frac{1+0{,}15141x+0{,}24392x^2}{1+0{,}72263x-0{,}32456x^2}=T(x). \qquad (5.49)$$

Это приближение во многих случаях является достаточно точным, как видно из следующей таблицы:

x	$\Gamma(1+x)$	$T(x)$	x	$\Gamma(1+x)$	$T(x)$
$-0{,}5$	1,7725	1,7767	0,1	0,95135	0,95135
$-0{,}4$	1,4892	1,4902	0,2	0,91817	0,91816
$-0{,}3$	1,29806	1,29823	0,3	0,89747	0,89743
$-0{,}2$	1,16423	1,16425	0,4	0,88726	0,88711
$-0{,}1$	1,06863	1,06863	0,5	0,8862	0,8858
0	1	1	0,6	0,8935	0,8927
			0,7	0,9086	0,9071
			1	1	0,994

17. Дробно-рациональное приближение для логарифма гамма-функции. Приближение этой функции, полученное на основании ряда Стирлинга, требует знания $\ln x$. Но можно получить более простое приближение, исходя из разложения

$$\ln\Gamma(1+x) = -Cx + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} s_n, \qquad (5.50)$$

где $s_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^n}$, C — постоянная Эйлера. Вычисляя коэффициенты, получаем приближенно

$$\ln\Gamma(1+x) \approx -0{,}57722x + 0{,}82247x^2 - 0{,}40068x^3 + \\ + 0{,}27058x^4 - \ldots$$

Применив к этому приближению метод Висковатова, будем иметь, в частности,

$$\ln\Gamma(1+x) \approx \frac{-0{,}57722x + 0{,}59769x^2}{1 + 0{,}38941x - 0{,}13928x^2}.$$

Отсюда

$$\lg\Gamma(1+x) \approx \frac{-0{,}25068x + 0{,}25957x^2}{1 + 0{,}38941x - 0{,}13928x^2} = T(x). \qquad (5.51)$$

Точность этого приближения видна из таблицы.

x	$\lg\Gamma(1+x)$	$T(x)$	x	$\lg\Gamma(1+x)$	$T(x)$
−0,5	0,2486	0,2469	0,1	$\bar{1}$,97834	$\bar{1}$,97834
−0,4	0,1730	0,1725	0,2	$\bar{1}$,96292	$\bar{1}$,96293
−0,3	0,11329	0,11321	0,3	$\bar{1}$,95302	$\bar{1}$,95305
−0,2	0,066039	0,066029	0,4	$\bar{1}$,94806	$\bar{1}$,94818
−0,1	0,0288268	0,0288266	0,5	$\bar{1}$,9475	$\bar{1}$,9479
0	0	0			

18. Дробно-рациональное приближение для производной логарифма гамма-функции. Функция

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln\Gamma(1+x)$$

имеет, согласно (5.50), разложение

$$\Psi(x) = -C + s_2 x - s_3 x^2 + \ldots + (-1)^{n+1} s_{n+1} x^n + \ldots$$

откуда

$$\Psi(x) \approx -0{,}57722 + 1{,}64493x - 1{,}20206x^2 + \\ + 1{,}08232x^3 - \ldots$$

Применяя к последнему приближению метод Висковатова, получим, в частности,

$$\Psi(x) \approx \frac{-0{,}57722 + 1{,}25687x}{1 + 0{,}67228x - 0{,}16670x^2} = T(x). \qquad (5.52)$$

Точность этого приближения видна из таблицы.

x	$\Psi(x)$	$T(x)$	x	$\Psi(x)$	$T(x)$
—0,5	—1,964	—1,938	0,1	—0,4238	—0,4237
—0,4	—1,541	—1,538	0,2	—0,2889	—0,2890
—0,3	—1,220	—1,218	0,3	—0,1692	—0,1687
—0,2	—0,9650	—0,9647	0,4	—0,0614	—0,0600
—0,1	—0,7549	—0,7549	0,5	0,0365	0,0396
0	—0,57722	—0,57722			

19. Формула Обрешкова. Знание общего вида звеньев цепной дроби, в которую разложена данная функция, недостаточно для определения общего вида подходящей дроби этого разложения. Все же в некоторых случаях общий вид подходящей дроби возможно определить. Наиболее общий подход к этому вопросу достигается при помощи *формулы Обрешкова*, которая является одним из обобщений формулы Тейлора. Формула Обрешкова имеет вид

$$\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \frac{C_k^{\nu}}{C_{m+k}^{\nu}} \frac{(x-x_0)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{C_m^{\nu}}{C_{m+k}^{\nu}} \frac{(x-x_0)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) + \\ + \frac{1}{(k+m)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^m (x_0-t)^k f^{(m+k+1)}(t)\, dt. \qquad (5.53)$$

Получение дробно-рациональных приближений степенной функции при помощи формулы Обрешкова. Положим в (5.53) $x_0 = 1$, $f(x) = x^n$, где n — любое действительное число. Тогда

$$x^n \approx \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{m} \frac{C_m^\nu C_n^\nu}{C_{m+k}^\nu}(x-1)^\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{C_k^\nu C_n^\nu}{C_{m+k}^\nu} \frac{(x-1)^\nu}{x^\nu}}.$$

При $m = k$ это равенство примет вид

$$x^n \approx \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{k} \frac{C_k^\nu C_n^\nu}{C_{2k}^\nu}(x-1)^\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{C_k^\nu C_n^\nu}{C_{2k}^\nu} \frac{(x-1)^\nu}{x^\nu}}.$$

В частности, при $k = 1$

$$x^n \approx \frac{2-n+nx}{n+(2-n)x}\, x.$$

Например, при $x = 2$ и $n = \frac{1}{3}$ имеем $\sqrt[3]{2} \approx \frac{14}{11} \approx 1,273$ (точное значение $\sqrt[3]{2} = 1,2599\ \ldots$).

Получение дробно-рациональных приближений показательной функции при помощи формулы Обрешкова. Положим в (5.53) $x_0 = 0$, $f(x) = e^x$. Тогда

$$e^x \approx \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{m} \frac{C_m^\nu}{C_{m+k}^\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}}{\sum\limits_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{C_k^\nu}{C_{m+k}^\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}}.$$

В частности, при $m = k$

$$e^x \approx \frac{2k(2k-1)\ldots(k+1) + C_k^1 (2k-1)\ldots(k+1)x + C_k^2 (2k-2)\ldots(k+1)x^2 + \ldots + x^k}{2k(2k-1)\ldots(k+1) - C_k^1 (2k-1)\ldots(k+1)x + C_k^2 (2k-2)\ldots(k+1)x^2 - \ldots + (-1)^k x^k}. \tag{5.54}$$

Из соотношения

$$\operatorname{th} x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

и из (5.54) имеем

$$\operatorname{th} x \approx \frac{C_k^1 (2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)x - C_k^3 (2k-3)(2k-4)\ldots(k+1)\,4x^3+\ldots}{k(2k-1)\ldots(k+1)x + C_k^2 (2k-2)(2k-3)\ldots(k+1)\,2x^2 + C_k^4 (2k-4)\ldots(k+1)\,8x^4+\ldots}$$

Заменив в последнем равенстве x на ix и разделив правую и левую части на i, получим общее выражение для подходящих дробей разложения $\operatorname{tg} x$ в цепную дробь.

Получение дробно-рациональных приближений логарифмической функции при помощи формулы Обрешкова. Положим в (5.53) $x_0=1$, $f(x)=\ln x$. Тогда

$$\ln x \approx \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{\nu-1} \frac{C_m^\nu}{C_{m+k}^\nu} \frac{(x-1)^\nu}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{C_k^\nu}{C_{m+k}^\nu} \frac{(x-1)^\nu}{\nu x^\nu}.$$

В частности, при $m=k$

$$\ln x \approx \sum_{\nu=1}^{k} \frac{C_k^\nu}{C_{2k}^\nu} \left[(-1)^{\nu-1} + \frac{1}{x^\nu}\right] \frac{(x-1)^\nu}{\nu}.$$

Например, при $k=1$

$$\ln x \approx \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right).$$

При $k=2$

$$\ln x \approx \frac{x^2-1}{12x^2}(8x-x^2-1).$$

§ 4. Метод матриц

1. Извлечение квадратного корня с помощью матриц второго порядка. Теория цепных дробей строится при помощи основных рекуррентных соотношений (5.2). Естественно рассмотреть обобщения цепных дробей, основанные на других линейных рекуррентных соотношениях, связывающих числители и знаменатели соседних подходящих дробей. Рассмотрим подробнее соотношения

$$\left.\begin{aligned} P_n &= \alpha_n P_{n-1} + \beta_n Q_{n-1}, \\ Q_n &= \gamma_n P_{n-1} + \delta_n Q_{n-1}, \end{aligned}\right\} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.55}$$

С помощью матриц эти равенства можно записать так:

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.56}$$

Положим $\alpha_n = a$, $\beta_n = u$, $\gamma_n = 1$, $\delta_n = a$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда соотношения (5.55) и (5.56), соответственно, примут вид

$$\left.\begin{aligned} P_n &= aP_{n-1} + uQ_{n-1} \\ Q_n &= P_{n-1} + aQ_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.57}$$

и

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & u \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.58}$$

При $a = 0$ процесс (5.57) расходится. Поэтому будем считать, что $a \neq 0$. Если $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n}$ существует, то он может равняться либо $\sqrt{u}$, либо $-\sqrt{u}$. Следовательно, при $u < 0$ процесс (5.57) расходится. Обозначим

$$-\sqrt{u} = x_1, \quad \sqrt{u} = x_2.$$

Тогда имеем четыре случая:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ a > x_2,\ x_2 < \frac{P_n}{Q_n} < \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \\ &2)\ 0 < a < x_2, \\ &\frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < x_2 < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}, \end{aligned}\right\} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n} = x_2.$$

$$\left.\begin{aligned} &3)\ x_1 < a < 0, \\ &\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < x_1 < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}}, \\ &4)\ a < x_1,\ \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{P_n}{Q_n} < x_1, \end{aligned}\right\} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n} = x_1.$$

Например:

1) $a > x_2$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 22 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \frac{5}{1} \quad \frac{47}{10} \quad \frac{455}{97} \quad \frac{4409}{940}$$

$$5 \quad 4{,}7 \quad 4{,}6907 \quad 4{,}69043$$

$$\sqrt{22} < 4{,}69043.$$

2) $0 < a < x_2$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 27 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \frac{5}{1} \quad \frac{52}{10} = \frac{26}{5} \quad \frac{265}{51} \quad \frac{2702}{520} = \frac{1351}{260}$$

$$5 \quad 5{,}2 \quad 5{,}19607 \quad 5{,}19616$$

$$5{,}19607 < \sqrt{27} < 5{,}19616.$$

3) $x_1 < a < 0$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \frac{-1}{1} \quad \frac{3}{-2} \quad \frac{-7}{5} \quad \frac{17}{-12} \quad \frac{-41}{29}$$

$$-1 \quad -1{,}5 \quad -1{,}4 \quad -1{,}416 \quad -1{,}4137$$

$$-1{,}416 < -\sqrt{2} < -1{,}4138.$$

4) $a < x_1$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \frac{-2}{1} \quad \frac{7}{-4} \quad \frac{-26}{15} \quad \frac{97}{-56}$$

$$-2 \quad -1{,}75 \quad -1{,}734 \quad -1{,}73214$$

$$-1{,}73214 < -\sqrt{3}.$$

2. Решение квадратных уравнений с помощью матриц второго порядка. Положим в (5.55) $\alpha_n = a$, $\beta_n = -q$, $\gamma_n = 1$, $\delta_n = a + p$. Тогда соотношения (5.55) и (5.56) примут вид

$$\left.\begin{aligned} P_n &= aP_{n-1} - qQ_{n-1}, \\ Q_n &= P_{n-1} + (a+p)Q_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{5.59}$$

и

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -q \\ 1 & a+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{5.60}$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}$ существует, то он может быть только корнем квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Следовательно, при $p^2 - 4q < 0$ процесс (5.59) расходится, так как в этом случае корни квадратного уравнения комплексны, а последовательность с действительными членами не может иметь комплексный предел.

Обозначим

$$x_1=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2},\quad x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

При $a=\frac{x_1+x_2}{2}$ процесс (5.59) расходится. В случае сходимости процесса имеем четыре случая:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a>x_2,\quad x_2<\frac{P_n}{Q_n}<\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\\ 2)\ \frac{x_1+x_2}{2}<a<x_2,\\ \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}}<\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}<x_2<\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}<\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}, \end{array}\right\}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=x_2;$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ x_1<a<\frac{x_1+x_2}{2},\\ \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}<\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}<x_1<\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}<\frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}},\\ 4)\ a<x_1,\quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}<\frac{P_n}{Q_n}<x_1, \end{array}\right\}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=x_1.$$

Например, уравнение

$$x^2+2x-1=0$$

имеет корни

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}\ \text{или}\ x_1\approx-2{,}414\ \text{и}\ x_2\approx 0{,}414.$$

1) $a>x_2$.

$$a=1,\quad \begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\ \frac{1}{1}\ \frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ \frac{3}{7}\ \frac{10}{24}=\frac{5}{12}.$$
$$\qquad\qquad 1\quad 0{,}5\quad 0{,}43\quad 0{,}417$$

2) $\frac{x_1+x_2}{2}<a<x_2$.

$$a=0,\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\ \frac{0}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{5}\ \frac{5}{12}.$$
$$\qquad\qquad 0\quad 0{,}5\quad 0{,}40\quad 0{,}417$$

3) $x_1 < a < \frac{x_1 + x_2}{2}$.

$$a = -2, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{-2}{1} \quad \frac{5}{-2} \quad \frac{-12}{5} \quad \frac{29}{-12};$$
$$-2 \quad -2{,}5 \quad -2{,}40 \quad -2{,}416$$

4) $a < x_1$.

$$a = -3, \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \frac{-3}{1} \quad \frac{10}{-4} = \frac{5}{-2} \quad \frac{-17}{7} \quad \frac{58}{-24} = \frac{29}{-12}.$$
$$-3 \quad -2{,}5 \quad -2{,}428 \quad -2{,}416$$

3. Связь метода матриц с теорией цепных дробей. Найдем условия, при которых равенства (5.55) могут перейти в равенства (5.2). Для этого заменим в равенствах (5.55) n через $n-1$, найдем Q_{n-1} и P_{n-1} из полученных соотношений и подставим их в равенства (5.55). Введя для краткости обозначение $\alpha_{n-1}\delta_{n-1} - \beta_{n-1}\gamma_{n-1} = \Delta_{n-1}$, получим

$$P_n = \left(\alpha_n + \frac{\beta_n \delta_{n-1}}{\beta_{n-1}}\right) P_{n-1} - \frac{\beta_n \Delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} P_{n-2} \tag{5.61}$$

и

$$Q_n = \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \alpha_{n-1} + \delta_n\right) Q_{n-1} - \frac{\gamma_n \Delta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} Q_{n-2}. \tag{5.62}$$

Равенства (5.61) и (5.62) показывают, что P_n и Q_n можно считать числителем и знаменателем подходящей дроби n-го порядка некоторой цепной дроби в том случае, если

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \alpha_{n-1} + \delta_n = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \delta_{n-1} + \alpha_n, \quad \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}. \qquad (n \geqslant 2).$$

Этим условиям легко придать вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha_n - \delta_n}{\beta_n} &= \frac{\alpha_{n-1} - \delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \dots = \frac{\alpha_1 - \delta_1}{\beta_1}, \\ \frac{\beta_n}{\gamma_n} &= \frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} = \dots = \frac{\beta_1}{\gamma_1}. \end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

Таким образом, матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \frac{\gamma_1}{\beta_1}\beta_n & \alpha_n - \frac{\alpha_1 - \delta_1}{\beta_1}\beta_n \end{pmatrix} \qquad (n \geqslant 1) \tag{5.64}$$

равносильна цепной дроби, частные числители a_n и частные знаменатели b_n которой выражаются равенствами

$$a_n = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}(\beta_{n-1}\gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}\delta_{n-1}), \quad b_n = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}\delta_{n-1} + \alpha_{n-1} \quad (n \geqslant 2).$$

Из соотношений

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0 \\ \gamma_0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}b_0 \\ 1\end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 b_0 + \beta_1 \\ \gamma_1 b_0 + \delta_1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}b_0 b_1 + a_1 \\ b_1\end{pmatrix}$$

находим нулевое и первое звено цепной дроби. Таким образом, матрица (5.64) вместе с матрицей $\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0 \\ 1 & \delta_0\end{pmatrix}$ приводит к цепной дроби:

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1\alpha_0 + \beta_1 - \alpha_0(\gamma_1\alpha_0 + \delta_1)}{\gamma_1\alpha_0 + \delta_1} + \frac{\frac{\beta_2}{\beta_1}(\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\delta_1)}{\frac{\beta_2}{\beta_1}\delta_1 + \alpha_2} + \ldots + \frac{\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}(\beta_{n-1}\gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}\delta_{n-1})}{\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}\delta_{n-1} + \alpha_n} + \ldots \quad (5.65)$$

Пример 20. Матрица $\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ приводит к $\sqrt{2}$ и равносильна цепной дроби

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots$$

В теории цепных дробей сжатие производится при помощи довольно сложной формулы (5.9) и аналогичных ей. Здесь оно производится гораздо легче при помощи возведения матрицы в квадрат, в куб и т. д. Имеем

$$\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4 \\ 2 & 3\end{pmatrix}, \quad a_n = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1,$$
$$b_n = 3 + 3 = 6 \quad (n \geqslant 2).$$

Нулевое и первое звено новой цепной дроби необходимо определять не на основании этой матрицы, а непосредственно, зная первые подходящие дроби исходного разложения для $\sqrt{2}$. Получим

$$\sqrt{2}=1+\frac{2}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\ldots.$$

Пользуясь кубом исходной матрицы, получим

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 5 & 7\end{pmatrix},$$

$$\sqrt{2}=1+\frac{5}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\ldots$$

4. Разложение квадратических иррациональностей в непериодические цепные дроби при помощи матриц второго порядка с переменными элементами. Результаты предыдущего пункта позволяют получить сколь угодно много разложений квадратических иррациональностей в непериодические цепные дроби.

Пример 21. Матрица

$$\begin{pmatrix}1 & 2(n+1)\\ n+1 & 1\end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям (5.63). Кроме того, она приводит к равенству

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}+2(n+1)Q_{n-1}}{(n+1)P_{n-1}+Q_{n-1}},$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=\sqrt{2}$. Равноценная ей цепная дробь (5.65) имеет вид

$$\sqrt{2}=1+\frac{2}{3}+\frac{21}{5}+\frac{8\cdot 17}{7}+\frac{15\cdot 31}{9}+\frac{24\cdot 49}{11}+\ldots+\frac{(n^2-1)(2n^2-1)}{2n+1}+\ldots$$

Точно так же получим, исходя из матрицы

$$\begin{pmatrix}n & 2(n+1)\\ n+1 & n\end{pmatrix},$$

цепную дробь

$$\sqrt{2}=\frac{4}{1}+\frac{21}{7}+\ldots+\frac{(n^2-1)(n^2+2n-1)}{2n^2-1}+\ldots.$$

5. Извлечение корня любой рациональной степени с помощью матриц. Извлечение корня третьей степени с помощью матриц. Рассмотрим три последовательности $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{R_n\}$, члены которых связаны друг с другом соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} P_n &= aP_{n-1}+tQ_{n-1}+tR_{n-1}, \\ Q_n &= P_{n-1}+aQ_{n-1}+tR_{n-1}, \\ R_n &= P_{n-1}+Q_{n-1}+aR_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (5.66)$$

С помощью матриц эти соотношения запишутся так:

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \\ R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t & t \\ 1 & a & t \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \\ R_{n-1} \end{pmatrix}. \qquad (5.67)$$

Пусть $x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}$ и $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Q_n}{R_n}$ существуют и конечны. Тогда

$$x=\sqrt[3]{t^2},\quad y=\sqrt[3]{t}.$$

Пример 22. Пусть $a=1$, $t=2$. Тогда

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1 1 1	5 4 3	19 15 12	73 58 46	281 223 177	1081 858 681
$\sqrt[3]{4}$ (приближенно)	1	1,67	1,583	1,5870	1,58757	1,58737
$\sqrt[3]{2}$ (приближенно)	1	1,33	1,250	1,2609	1,25989	1,259912

Известно, что $\sqrt[3]{2}\approx 1,2599210$, $\sqrt[3]{4}\approx 1,5874011$.

Пользуясь квадратом, кубом или более высокими степенями исходной матрицы, можем сколь угодно усилить сходимость процесса.

Извлечение корня четвертой степени с помощью матриц. Обобщая соотношения (66), рассмотрим следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} P_n &= aP_{n-1}+tQ_{n-1}+tR_{n-1}+tS_{n-1}, \\ Q_n &= P_{n-1}+aQ_{n-1}+tR_{n-1}+tS_{n-1}, \\ R_n &= P_{n-1}+Q_{n-1}+aR_{n-1}+tS_{n-1}, \\ S_n &= P_{n-1}+Q_{n-1}+R_{n-1}+aS_{n-1}. \end{aligned}\right\} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

С помощью матриц эти соотношения запишутся так:

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \\ R_n \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t & t & t \\ 1 & a & t & t \\ 1 & 1 & a & t \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \\ R_{n-1} \\ S_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{S_n} = \sqrt[4]{t^3}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{S_n} = \sqrt[4]{t^2} = \sqrt{t}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{S_n} = \sqrt[4]{t},$$

если эти пределы существуют и конечны. При $a = 1$ имеем таблицу

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t & t \\ 1 & 1 & t & t \\ 1 & 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1+3t & 1+12t+3t^2 & 1+31t+31t^2+t^3 \\ 1 & 2+2t & 3+12t+t^2 & 4+40t+20t^2 \\ 1 & 3+t & 6+10t & 10+44t+10t^2 \\ 1 & 4 & 10+6t & 20+40t+4t^2. \end{matrix}$$

Отсюда, в частности, получаются неравенства

$$\frac{t^2+12t+3}{6t+10} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \frac{6t^2+10t}{t^2+12t+3} \ (1 \leqslant t \leqslant 9),$$

$$\frac{6t^2+10t}{t^2+12t+3} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \frac{t^2+12t+3}{6t+10} \ (t \geqslant 9).$$

Область применимости этих приближений ясна из следующей таблицы:

t	$\frac{t^2+12t+3}{6t+10}$	$\sqrt{t}$	$\frac{6t^2+10t}{t^2+12t+3}$
1	1,000	1,000	1,000
2	1,409	1,414	1,419
3	1,714	1,732	1,750
4	1,971	2,000	2,030
5	2,200	2,236	2,273
6	2,413	2,449	2,486
7	2,615	2,646	2,676
8	2,810	2,828	2,847
9	3,000	3,000	3,000
10	3,186	3,162	3,139
11	3,368	3,317	3,266
12	3,549	3,464	3,381
13	3,727	3,606	3,488

Извлечение корня любой рациональной степени с помощью матриц. Обобщая вышеизложенный метод, видим, что квадратная матрица n-го порядка

$$\begin{pmatrix} a & t & t & & t \\ 1 & a & t & & t \\ & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & a \end{pmatrix}$$

позволяет получить приближенные значения для

$$\sqrt[n]{t},\quad \sqrt[n]{t^2},\qquad\qquad \sqrt[n]{t^{n-1}}.$$

Например, чтобы вычислить $\sqrt[7]{4}$, достаточно проделать следующие выкладки:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 13 & 127 \\ 1 & 12 & 115 \\ 1 & 11 & 104 \\ 1 & 10 & 94 \\ 1 & 9 & 85 \\ 1 & 8 & 77 \\ 1 & 7 & 70 \end{matrix}$$

В частности, $\sqrt[7]{4} \approx \frac{104}{85} = 1,223$ или $\sqrt[7]{4} \approx \frac{85}{70} \approx 1,214$. Точное значение этого корня есть $1,219\ldots$

Сходимость алгоритма Эйлера. Метод извлечения корня любой рациональной степени при помощи матриц был впервые предложен Эйлером (хотя и не в матричной форме). Условия его сходимости были недавно изучены Л. Д. Эскиным. В частности, он доказал, что алгоритм Эйлера сходится при любом $t > 0$, если только выбрать надлежащим образом нулевое приближение. Более того, алгоритм Эйлера сходится и при комплексных t, что позволяет с его помощью приближенно извлекать корни из комплексных чисел.

6. Решение уравнения третьей степени с помощью матриц. Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{5.68}$$

приводит к уравнениям

$$x=\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}} \quad \text{и} \quad y=\frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}}. \tag{5.69}$$

Исключая x из этих уравнений, приходим к уравнению третьей степени относительно y. Следовательно, матрица (5.68), в случае сходимости соответствующего процесса, может служить для приближенного вычисления одного из корней некоторого уравнения третьей степени.

Из уравнений (5.69) нетрудно получить уравнения

$$y=1+\frac{(a_{21}-a_{31})x+(a_{22}-a_{32})y+a_{23}-a_{33}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}},$$

$$x=y+\frac{(a_{11}-a_{21})x+(a_{12}-a_{22})y+a_{13}-a_{23}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство $y^2=x$. Для этого достаточно, чтобы полученные равенства приняли вид

$$y=1+\frac{a_{23}-a_{33}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}}, \quad x=y+\frac{(a_{23}-a_{33})y}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}}.$$

Тогда

$$a_{21}=a_{31}, \quad a_{22}=a_{32}, \quad a_{11}=a_{21}, \quad a_{13}=a_{23},$$
$$a_{12}-a_{22}=a_{23}-a_{33}.$$

Матрица (5.68) примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22}+a_{13}-a_{33} & a_{13} \\ a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{5.70}$$

Она приводит к уравнению

$$a_{11}y^3+(a_{22}-a_{11})y^2+(a_{33}-a_{22})y-a_{13}=0. \tag{5.71}$$

Положим, в частности, $a_{11}=a_{22}=1$ и обозначим $a_{33}-1=p$, $a_{13}=-q$. Матрица (5.70) примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -p-q & -q \\ 1 & 1 & -q \\ 1 & 1 & p+1 \end{pmatrix}. \tag{5.72}$$

Она приводит к уравнению

$$y^3+py+q=0.$$

При $p=0$, $q=-t$ матрица (5.72) обращается в матрицу для извлечения кубичного корня.

Пример 23. Применим матрицу (5.72) для приближенного нахождения одного из корней уравнения $x^3 - x - 1 = 0$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 4 & 12 & 37 & 114 & 351 & 1081 \\ 1 & 3 & 9 & 28 & 86 & 265 & 816 \\ 1 & 2 & 7 & 21 & 65 & 200 & 616 \\ 1 & 1{,}5 & 1{,}285 & 1{,}333 & 1{,}292 & 1{,}325 & 1{,}324 \end{matrix}$$

Заметим, что такой метод обладает быстрой сходимостью лишь в том случае, если уравнение не имеет двух корней, близких друг к другу по абсолютной величине.

7. Возвратные ряды. Метод Бернулли — Эйлера. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, коэффициенты которого, начиная с некоторого, связаны одним и тем же линейным соотношением, называется *возвратным*. Имеет место теорема: чтобы сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, сходящегося при $|x| < 1$, была рациональной функцией от x, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ был возвратным.

Д. Бернулли и Эйлер применили возвратные ряды к решению алгебраических уравнений. Коши обосновал этот метод, указав, что если x_1 есть наименьший по абсолютной величине корень многочлена $Q(x)$, то радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ — многочлен, не имеющий общих корней с $Q(x)$, и степень которого не выше степени $Q(x)$, определяется по признаку Даламбера соотношением

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} x_1}{a_n} = 1,$$

откуда

$$x_1 = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Например, для решения уравнения $x^3-3x+1=0$ Эйлер пользовался следующим разложением

$$\frac{1}{1-3x+x^3}=1+3x+9x^2+26x^3+75x^4+216x^5+\\+622x^6+1791x^7+5157x^8+14849x^9+\\+42756x^{10}+\ldots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Здесь $x_1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$, где x_1 — наименьший по абсолютной величине корень уравнения $x^3-3x+1=0$. Сходимость процесса видна из следующей таблицы:

n	$\frac{a_n}{a_{n+1}}$
1	0,333
2	0,333
3	0,346
4	0,3467
5	0,34722
6	0,34727
7	0,347292

Заменяя x на $\frac{1}{x}$, можно тем же способом приближенно найти наибольший по абсолютной величине корень уравнения $Q(x)=0$.

Метод Бернулли — Эйлера также обладает быстрой сходимостью лишь в том случае, если уравнение не имеет двух корней, близких друг к другу по абсолютной величине.

8. Связь между методом Бернулли — Эйлера и методом матриц. Найдем по методу Бернулли — Эйлера наименьший по абсолютной величине корень уравнения $x^3+px+q=0$. Для этого достаточно разложить в возвратный ряд выражение $\frac{1}{q+px+x^3}$. Имеем

$$\frac{1}{q+px+x^3}=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$A_0=\frac{1}{q},\ qA_1+pA_0=0,\ qA_2+pA_1=0,\ qA_3+pA_2+A_0=0$$

и в общем случае

$$qA_n+pA_{n-1}+A_{n-3}=0 \qquad (n\geqslant 3).$$

Это соотношение можно записать в виде матричного равенства

$$\begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \\ -1 & 0 & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-3} \\ A_{n-2} \\ A_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} qA_{n-2} \\ qA_{n-1} \\ qA_n \end{pmatrix}.$$

Но это равенство дает только один новый коэффициент A_n, а два предыдущих повторяет. Взяв куб матрицы, составленной из коэффициентов, мы сразу получим три новых коэффициента:

$$\begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \\ -1 & 0 & -p \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} A_{n-3} \\ A_{n-2} \\ A_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q^3A_n \\ q^3A_{n+1} \\ q^3A_{n+2} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} q^2 & 0 & pq^2 \\ -pq & q^2 & -p^2q \\ p^2 & -pq & p^3+q^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-3} \\ A_{n-2} \\ A_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q^3A_n \\ q^3A_{n+1} \\ q^3A_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Применяя этот прием к уравнению $x^3-3x-1=0$, получим

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 9 \\ -9 & -3 & 26 \end{pmatrix}\quad \begin{matrix} 1 & 26 & 622 & 14849 \\ 3 & 75 & 1791 & 42756 \\ 9 & 216 & 5157 & 123111 \end{matrix}$$

Можно брать еще более высокие степени исходной матрицы; это еще более усилит сходимость, но при этом будут получаться не все коэффициенты возвратного ряда. Элементы получаемых матриц можно делить на одно и то же число, так как нам нужно только отношение соседних коэффициентов. Но при этом, вообще говоря, полученный ряд будет отличаться от возвратного ряда, в который разлагается выражение $\dfrac{1}{q+px+x^3}$.

При замене x на $\frac{1}{x}$ таким же образом можно вычислить наибольший по абсолютной величине корень уравнения $x^3+px+q=0$ (если соответствующий процесс сходится).

9. Решение уравнений высших степеней с помощью матриц. Методом, аналогичным вышеизложенным, можно составить матрицы n-го порядка, которые могут служить для приближенного вычисления корней некоторого уравнения n-й степени. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} k & la_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & la_n \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & la_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & la_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & la_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 & la_n \\ -la_0 & -la_1 & -la_2 & -la_{n-5} & -la_{n-4} & -la_{n-3} & k-la_{n-1} & -la_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & la_n & k \end{pmatrix}$$

в случае сходимости соответствующего процесса может служить для приближенного вычисления одного из корней уравнения

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0.$$

Например, для уравнения

$$x^4-8x^3+x^2-x+1=0,$$

положив $k=l=1$, имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{rrrrrrrr} 1 & (2) & 1 & 2 & 4 & 11 & 58 & 455 \\ 1 & (2) & 1 & 2 & 7 & 47 & 397 & 3500 \\ 1 & (8) & 4 & 35 & 310 & 2753 & 24463 & 217403 \\ 1 & (2) & 1 & 5 & 40 & 350 & 3103 & 27566 \\ 1 & & 4 & 7 & 7{,}75 & 7{,}866 & 7{,}8837 & 7{,}8866 \end{array}$$

Точное значение этого корня есть 7,8873

10. Понятие об алгоритме Якоби. Эйлер поставил и отчасти разрешил задачу о решении в целых числах уравнения $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$. Якоби поставил аналогичную задачу для уравнения

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

и разработал для этой цели особый алгоритм, являющийся обобщением алгоритма цепных дробей. Якоби придал, в частности, этому алгоритму следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= v_n - p_n u_n, \\ v_{n+1} &= w_n - q_n u_n, \\ w_{n+1} &= u_n. \end{aligned}\right\} \tag{5.73}$$

Здесь p_n и q_n — натуральные числа, подобранные так, чтобы u_{n+1} и v_{n+1} были возможно меньшими положительными числами. С помощью чисел p_n и q_n мы составляем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= q_n A_{n-1} + p_n A_{n-2} + A_{n-3}, \\ B_n &= q_n B_{n-1} + p_n B_{n-2} + B_{n-3}, \\ C_n &= q_n C_{n-1} + p_n C_{n-2} + C_{n-3}. \end{aligned}\right\} \tag{5.74}$$

При этом полагаем, что

$$\begin{pmatrix} A_{-2} & A_{-1} & A_0 \\ B_{-2} & B_{-1} & B_0 \\ C_{-2} & C_{-1} & C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, в случае сходимости алгоритма Якоби,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} = \frac{u_1}{w_1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{C_n} = \frac{v_1}{w_1}.$$

Алгоритм Якоби позволяет найти небольшие целые числа A_n, B_n, C_n, приближенно пропорциональные данным большим числам u_1, v_1, w_1.

Пример 24. Решим приближенно уравнение

$$x : y : z \approx 49 : 59 : 75.$$

Пользуясь алгоритмом Якоби, имеем

n	u_n	v_n	w_n	p_n	q_n	A_n	B_n	C_n
—2						1	0	0
—1						0	1	0
0						0	0	1
1	49	59	75	1	1	1	1	1
2	10	26	49	2	4	4	5	6
3	6	9	10	1	1	5	6	8
4	3	4	6	1	2	15	18	23
5	1	0	3	0	3	49	59	75
6	0	0	1					

Итак, например, $5:6:8 \approx 15:18:23 \approx 49:59:75$.

Порядок заполнения этой таблицы таков: сначала выписываем $u_1 = 49$, $v_1 = 59$, $w_1 = 75$ и A_n, B_n, C_n при $n = -2, -1, 0$. Затем, согласно алгоритму (5.73), вычисляем p_1, q_1, u_2, v_2, w_2. Далее с помощью соотношений (5.74) вычисляем A_1, B_1, C_1. Затем, согласно алгоритму (5.73), вычисляем p_2, q_2, u_3, v_3, w_3. С помощью соотношения (5.74) вычисляем A_2, B_2, C_2 и т. д.

ГЛАВА VI

НЕКОТОРЫЕ СИСТЕМЫ ЧИСЕЛ И ФУНКЦИЙ

Настоящая глава содержит сведения о часто встречающихся в анализе константах и функциях в действительной области*).

При изложении приходится считаться с установившимся в математической литературе отсутствием единообразия в определениях. Так, например, обычно *производящая функция* последовательности функций определяется как функция двух переменных $f(x, y)$, для которой в некоторой области плоскости Oxy выполняется соотношение

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) y^n,$$

т. е. $\varphi_n(x)$ являются *коэффициентами* разложения функции $f(x, y)$ в ряд по степеням y (см. определение производящих функций для бесселевых функций и многочленов Лежандра). В других случаях функция $f(x, y)$ называется *производящей* для последовательности функций, если

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{n!} y^n$$

(см. определение производящих функций для многочленов Бернулли и Эйлера).

Нет единообразия и в обозначениях тех или иных функций. В таких случаях приводятся разные обозначения, но используется лишь одно из них.

---

*) Сведения о функциях комплексного переменного будут даны в одном из последующих выпусков.

§ 1. Некоторые константы и системы чисел

1. Константы. 1°. Число π:

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ \ldots$$

Число π появилось в связи с вычислением длины окружности посредством последовательного нахождения периметров вписанных и описанных правильных многоугольников с 2^n сторонами. π — трансцендентное число.

Некоторые приближенные значения числа π:

$$\pi \approx \frac{22}{7} \quad (\textit{архимедово число});$$

$$\pi \approx \frac{355}{113} \quad (\textit{мециево число}).$$

Некоторые представления π в виде рядов и произведений. Полагая $x = 1$ в степенном разложении $\operatorname{arctg} x$, имеем *ряд Лейбница*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \ldots \qquad (6.1)$$

Из того же разложения при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ следует

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\frac{1}{3^3} + \ldots\right). \qquad (6.2)$$

Так как $\pi = 16 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ (*формула Мэшина*), то

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{5^7} + \frac{1}{9}\frac{1}{5^9} - \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\frac{1}{239^3} + \ldots\right). \qquad (6.3)$$

Формула Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}. \qquad (6.4)$$

Цепная дробь

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \ldots + \frac{n^2}{2n+1} + \ldots \qquad (6.5)$$

Другие соотношения:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]. \tag{6.6}$$

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}. \tag{6.7}$$

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}. \tag{6.8}$$

$$\frac{\pi}{8}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}. \tag{6.9}$$

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1}+(-1)^n n\sum_{\mu=1}^{m}\frac{E_{2\mu-2}}{(2n)^{2\mu}}+\frac{\theta(-1)^n E_{2m}}{(2n)^{2m+2}}, \tag{6.10}$$

$$0<\theta<1.$$

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2n}{n^2+\nu^2}-\frac{2\pi}{e^{2\pi n}-1}+\frac{1}{2n}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{(-1)^{\mu-1}B_{4\mu-2}}{(2n^2)^{2\mu-1}}\,\frac{1}{2\mu-1}+\frac{\theta(-1)^m}{(2n^2)^{m+1}}\,\frac{B_{4m+2}}{2m+1}. \tag{6.11}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots \tag{6.12}$$

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}. \tag{6.13}$$

$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{39}{16}+\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}+\ldots \tag{6.14}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{6.15}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}. \tag{6.16}$$

$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}. \tag{6.17}$$

$$\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{2}(\ln 2)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n}. \tag{6.18}$$

$$\frac{3\pi^2}{32}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^3}. \tag{6.19}$$

$$\frac{\pi^2}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1^2 3^2}+\frac{1}{3^2 5^2}+\frac{1}{5^2 7^2}+\ldots \tag{6.20}$$

$$\frac{3\pi^2}{256}=\frac{1}{9}+\frac{1}{1^2 3^2 5^2}+\frac{1}{3^2 5^2 7^2}+\frac{1}{5^2 7^2 9^2}+\ldots \tag{6.21}$$

Неравенства, связанные с числом π. Если $a_n (n=1, 2, \ldots)$, $a_n \geqslant 0$, но не все a_n равны нулю, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^4 \leqslant \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 \sum_{n=1}^{\infty}n^2 a_n^2, \tag{6.22}$$

причем π^2 является наилучшей константой в том смысле, что существует последовательность a_n, для которой достигается знак равенства. Если $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \not\equiv 0$, $f \in L^2(0, \infty)$, $xf \in L^2(0, \infty)$, то

$$\left\{\int_0^{\infty} f(x)\,dx\right\}^4 \leqslant \pi^2 \left\{\int_0^{\infty} f^2(x)\,dx\right\}\left\{\int_0^{\infty} x^2 f^2(x)\,dx\right\}, \tag{6.23}$$

где π^2 является наилучшей константой в том смысле, что существуют $f(x)$, для которых знак равенства достигается.

Интегральные представления π:

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx. \tag{6.24}$$

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\infty}\frac{\sin x \cos mx}{x}\,dx, \quad m<1. \tag{6.25}$$

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx. \tag{6.26}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx=\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx. \tag{6.27}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx. \tag{6.28}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx. \tag{6.29}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4}=\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx. \tag{6.30}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1}. \tag{6.31}$$

$$\frac{\pi^2}{12}=\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1}. \tag{6.32}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{x-1}. \tag{6.33}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{x^2-1}. \tag{6.34}$$

$$\frac{\pi^2}{12}=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\,dx}{x}. \tag{6.35}$$

2°. Число e:

$$e=2{,}7182818284\,59045\ldots$$

Число Эйлера e определяется как предел

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{6.36}$$

e — число трансцендентное.

Выражения для e, e^2, e^{-1}, $(1+e)^2$ в виде рядов и произведений:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}. \tag{6.37}$$

$$e=\frac{1}{p_m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^m}{n!}, \tag{6.38}$$

$$p_{m+1}=1+mp_1+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}p_2+\ldots+p_m;$$

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_3=5,\ p_4=15,\ p_5=52,\ \ldots$$

$$e=\frac{2}{1}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6\cdot 8}{5\cdot 7}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}{9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}\right)^{\frac{1}{8}} \tag{6.39}$$

$$e^2=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}. \tag{6.40}$$

$$(1+e)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+2^n}{n!}. \tag{6.41}$$

$$e^{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}. \tag{6.42}$$

$$e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}. \tag{6.43}$$

$$e^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}. \tag{6.44}$$

$$2e^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a(a+d)(a+2d)\ldots[a+(n-1)d]}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a+kd)}. \tag{6.45}$$

$$e=\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{3}{10}+\ \ldots\ +\frac{n}{2(2n+1)}+\ldots \quad \text{(цепная дробь).} \tag{6.46}$$

Некоторые неравенства. При $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$1-\frac{t}{n} \leqslant e^{-\frac{t}{n}}. \tag{6.47}$$

$$1+\frac{t}{n} \leqslant e^{\frac{t}{n}}. \tag{6.48}$$

$$0 \leqslant 1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} \leqslant \frac{t^{2}}{n}. \tag{6.49}$$

При $u_n > 0$:

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n} \leqslant e. \tag{6.50}$$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{u_1+u_{n+1}}{u_n} \geqslant e. \tag{6.51}$$

Минимумы

$$\min_{0 \leqslant x < \infty} x^{x}=e^{-1}. \tag{6.52}$$

$$\min_{0 < x < \infty} \frac{x}{\ln x}=e. \tag{6.53}$$

Число e есть основание логарифмов, при котором удовлетворяется неравенство

$$\log_a x \leqslant x-1 \quad \text{(Остроградский)}. \tag{6.54}$$

Функции e^x и e^{-x} определяются как пределы

$$e^{x}=\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}, \quad e^{-x}=\lim_{n \to \infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} \tag{6.55}$$

3°. Постоянная Эйлера — Маскерони C:

$$C=0{,}57721\ 56649\ 01532\ 5\ \ldots$$

Постоянной Эйлера — Маскерони C называется предел

$$C=\lim_{m \to \infty}\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}-\ln m\right), \tag{6.56}$$

существование которого следует из сходимости ряда с общим членом

$$g(n)=\frac{1}{n}-\int_{n}^{n+1} t^{-1}\,dt.$$

Неизвестно, рациональна или иррациональна C.

Интегральные представления. Так как

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}=\int_0^1 \frac{1-t^m}{1-t}\,dt=$$
$$=\int_0^m \left[1-\left(1-\frac{y}{m}\right)^m\right] y^{-1}\,dy$$

и

$$-\ln m=-\int_1^m y^{-1}\,dy,$$

то

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\ln m=\int_0^1 \left[1-\left(1-\frac{y}{m}\right)^m\right] y^{-1}\,dy-$$
$$-\int_1^m \left(1-\frac{y}{m}\right)^m y^{-1}\,dy,$$

откуда, переходя к пределу, находим

$$C=\int_0^1 (1-e^{-y})\,y^{-1}\,dy-\int_1^{\infty} e^{-y}y^{-1}\,dy \tag{6.57}$$

или

$$C=\int_0^1 \left(1-e^{-t}-e^{-\frac{1}{t}}\right)t^{-1}\,dt. \tag{6.58}$$

Из (6.58) следует, что

$$C=\int_0^{\infty} \left[(1-e^{-t})^{-1}-t^{-1}\right]e^{-t}\,dt. \tag{6.59}$$

Другие интегральные представления:

$$C = -\int_0^\infty e^{-t} \ln t \, dt. \tag{6.60}$$

$$C = \int_0^1 \left[\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{1-t}\right] dt. \tag{6.61}$$

$$C = -\int_0^\infty \left(\cos t - \frac{1}{1+t}\right) \frac{dt}{t}. \tag{6.62}$$

$$C = 1 - \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t} - \frac{1}{1+t}\right) \frac{dt}{t}. \tag{6.63}$$

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t}\right) \frac{dt}{t}. \tag{6.64}$$

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - e^{-t}\right) \frac{dt}{t}. \tag{6.65}$$

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{\cos t}{t}\right) dt. \tag{6.66}$$

$$C = -\int_0^1 \ln \ln \frac{1}{t} \, dt. \tag{6.67}$$

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arcctg} t - e^{-pt}\right) \frac{dt}{t} - \ln p. \tag{6.68}$$

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arcctg} t - \cos pt\right) dt - \ln p. \tag{6.69}$$

$$C = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin t \ln t \, \frac{dt}{t}. \tag{6.70}$$

Асимптотическое разложение:

$$C=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n}-\ln m+\frac{1}{2m}+\frac{1}{12m^2}-\frac{1}{120m^4}+$$

$$+\frac{B_{2n}}{2n}\frac{1}{m^{2n}}+\theta\frac{B_{2n+2}}{2n+2}\frac{1}{m^{2n+2}},\quad 0<\theta<1. \tag{6.71}$$

Бесконечные произведения, выражающиеся через e и C:

$$\prod_1^\infty\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\lim_{m\to\infty}\frac{e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}-\ln m\right)+\ln m}}{\prod\limits_1^m\left(1+\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=e^C\lim_{m\to\infty}\frac{m}{\prod\limits_1^\infty\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^C. \tag{6.72}$$

$$C=\lim_{t\to 1-0}\left[(1-t)\left(\frac{t}{1-t}+\frac{t^2}{1-t^2}+\ldots+\frac{t^n}{1-t^n}-\ln\frac{1}{1-t}\right)\right]. \tag{6.73}$$

4°. Постоянная Каталана G:

$$G=0{,}91596\ 55941\ 77219\ 0\ \ldots$$

Постоянной Каталана G называется число

$$G=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\,dx. \tag{6.74}$$

Выражение постоянной Каталана в виде ряда получается, если в (6.74) разложить $x^{-1}\operatorname{arctg}x$ в степенной ряд:

$$G=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}. \tag{6.75}$$

Другие интегральные представления:

$$G=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\,dt}{\sin t}. \tag{6.76}$$

$$G=\frac{\pi}{4}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{tg}\,t\,dt. \tag{6.77}$$

$$G=-\frac{\pi}{4}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{ctg}\,t\,dt. \tag{6.78}$$

$$\pm G=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\,dt}{(\cos t\pm\sin t)\sin t}. \tag{6.79}$$

$$G=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{t\,dt}{(\sin t+\cos t)\sin t}. \tag{6.80}$$

$$G=-\frac{\pi}{2}\ln 2-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt. \tag{6.81}$$

$$G=-\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt. \tag{6.82}$$

$$\pm G=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1\pm\cos t)\,dt+\frac{\pi}{4}\ln 2. \tag{6.83}$$

$$G=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\mathrm{tg}\,t)\,dt-\frac{\pi}{4}\ln 2. \tag{6.84}$$

$$G = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt. \tag{6.85}$$

$$G = -\frac{\pi}{2}\ln 2 - 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{\ln t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{6.86}$$

$$G = \int_0^\infty \ln(1+t)\frac{dt}{1+t^2} - \frac{\pi}{4}\ln 2. \tag{6.87}$$

$$G = -\frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt. \tag{6.88}$$

$$G = \frac{\pi}{8}\ln 2 - \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t^2}\,dt. \tag{6.89}$$

$$G = \int_0^1 \ln\frac{1+t}{1-t}\,\frac{dt}{1+t^2}. \tag{6.90}$$

$$G = \frac{3\pi}{8}\ln 2 - \int_0^1 \ln\frac{1+t^2}{1+t}\,\frac{dt}{1+t^2}. \tag{6.91}$$

$$G = \pm\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arccos t}{1\pm t}\,dt. \tag{6.92}$$

$$G = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arcctg} t}{1\pm t}\,dt \mp \frac{\pi}{4}\ln 2. \tag{6.93}$$

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t(1+t)}\,dt + \frac{\pi}{8}\ln 2. \tag{6.94}$$

$$G = -\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} t}{1-t^2}\,dt. \tag{6.95}$$

$$G = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} t\right)\frac{dt}{1-t}. \tag{6.96}$$

$$G = 2\int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} t\right)\frac{1+t}{1-t}\,\frac{dt}{1+t^2} - \frac{\pi}{4}\ln 2. \tag{6.97}$$

$$G = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\int_0^\infty (\operatorname{arctg} t)^2 \frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}}. \tag{6.98}$$

$$G = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\int_0^\infty (\operatorname{arcctg} t)^2 \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{6.99}$$

Выражения через полные эллиптические интегралы (см. (6.380) и (6.381)):

$$G = \frac{1}{2}\int_0^1 K(k)\,dk. \tag{6.100}$$

$$G = \int_0^1 E(k)\,dk - 1. \tag{6.101}$$

2. Некоторые системы чисел. 1°. Факториалы. При n — целом положительном

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \quad n. \tag{6.102}$$

По определению

$$0! = 1.$$

Обобщением понятия факториала является гамма-функция (см. § 4, п. 5).

При m — целом положительном:

$$(2m)!! = 2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2m. \tag{6.103}$$

$$(2m+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 \quad (2m+1). \tag{6.104}$$

$$(2m)! = 2^m m!\,(2m-1)!! \tag{6.105}$$

Число $n!!$ называют *двойным факториалом* числа n.

Выражения для факториалов, обратных факториалов и их сумм:

$$\frac{1}{nn!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)\ldots(m+n)}. \tag{6.106}$$

$$(n+1)!=1+\sum_{k=1}^{n} kk! \tag{6.107}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\frac{e+e^{-1}}{2}=\operatorname{ch} 1=1{,}54308\ldots \tag{6.108}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{e-e^{-1}}{2}=\operatorname{sh} 1=1{,}175201\ldots \tag{6.109}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1=0{,}54030\ldots \tag{6.110}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}=\sin 1=0{,}84147 \tag{6.111}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}=I_0(2)=2{,}27958530\ldots \tag{6.112}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+1)!}=I_1(2)=1{,}590636855\ldots \tag{6.113}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+k)!}=I_k(2). \tag{6.114}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}=J_0(2)=0{,}22389078\ldots \tag{6.115}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}=J_1(2)=0{,}57672481\ldots \tag{6.116}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+k)!}=J_k(2). \tag{6.117}$$

Оценки и асимптотические формулы:

$$\sqrt{\frac{4}{5}}\,e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{6.118}$$

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{6.119}$$

$$\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \sim 4. \tag{6.120}$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\ldots\right) \quad \text{(Стирлинг)}. \tag{6.121}$$

$$(2n-1)!! = \sqrt{2}\,(2n)^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}, \quad |\theta_n| < 1. \tag{6.122}$$

$$n! = \sqrt{2\pi}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\theta}{24n+12}} \quad \text{(Гаусс)}. \tag{6.123}$$

Формула для логарифма факториала:

$$\ln n! = \sum_{p \leqslant n} \ln p\left(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots\right), \tag{6.124}$$

где сумма распространяется по всем простым числам p, не превышающим n. ($[x]$ есть целая часть x. См. § 3, п. 1, 3°).

Делители факториала. Наибольший показатель, с каким простое число p входит множителем в $n!$, есть

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right], \tag{6.125}$$

где $p^k \leqslant n$, но $p^{k+1} > n$.

Например, наивысшая степень числа 2, на которую делится 50!, есть

$$\frac{50}{2}+\left[\frac{50}{4}\right]+\left[\frac{50}{8}\right]+\left[\frac{50}{16}\right]+\left[\frac{50}{32}\right] = 47.$$

Следовательно, 50! делится на 2^{47}.

2°. Символы Кронекера δ_n^m (или δ_{mn})

$$\delta_n^m = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \tag{6.126}$$

Интегральное представление:

$$\delta_n^m = \int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx, \tag{6.127}$$

где $\{\varphi_k(x)\}$ — ортонормированная на $[a, b]$ система функций.

Например,

$$\delta_n^m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx. \tag{6.128}$$

3°. Биномиальные коэффициенты $\binom{n}{m}$ или C_n^m при n *произвольном* действительном и m натуральном определяются формулой

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}. \tag{6.129}$$

При n целом положительном

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{6.130}$$

Обобщением понятия биномиальных коэффициентов служит бета-функция (см. § 4, п. 5, 2°).

Некоторые соотношения между биномиальными коэффициентами (n, m — целые):

$$\binom{n}{m} = 0 \quad \text{при } n > 0,\ m > n. \tag{6.131}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}. \tag{6.132}$$

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{6.133}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+1+k}{k}. \tag{6.134}$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k}. \tag{6.135}$$

$$\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{3} + \ldots + \binom{2n+1}{2n+1} = 2^{2n}. \tag{6.136}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}. \tag{6.137}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}. \tag{6.138}$$

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{n-1} = 2^{2n-2} \quad (n\text{ — нечетное}). \tag{6.139}$$

$$\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\ldots+\binom{2n}{n-1}=2^{2n-2} \quad (n\text{ — четное}). \quad (6.140)$$

$$\binom{n}{1}-3\binom{n}{3}+3^2\binom{n}{5}-3^3\binom{n}{7}+\ldots=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}. \quad (6.141)$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+ \quad =\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right). \quad (6.142)$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+4)\pi}{3}\right). \quad (6.143)$$

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right). \quad (6.144)$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right). \quad (6.145)$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right). \quad (6.146)$$

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right). \quad (6.147)$$

$$\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right). \quad (6.148)$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}. \quad (6.149)$$

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\ldots=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}. \quad (6.150)$$

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+\ldots+(n+1)\binom{n}{n}=(n+2)\,2^{n-1}. \quad (6.151)$$

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0 \quad (n\neq 1). \quad (6.152)$$

$$\frac{1}{2}\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{n}{n+1}. \quad (6.153)$$

$$\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \quad (6.154)$$

$$2\binom{n}{0}+\frac{2^2}{2}\binom{n}{1}+\frac{2^3}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}. \quad (6.155)$$

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}- \qquad +\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n}{n}= \\ =1+\frac{1}{2}+ \qquad +\frac{1}{n}. \quad (6.156)$$

$$\binom{n+1}{2}+2\left[\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}+ \qquad +\binom{2}{2}\right]= \\ =1^2+2^2+ \qquad +n^2. \quad (6.157)$$

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\ldots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\binom{n+m}{k}. \quad (6.158)$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k}+\binom{n}{1}\binom{n}{k+1}+ \qquad +\binom{n}{n-k}\binom{n}{n}= \\ =\binom{2n}{n-k}=\frac{(2n)!}{(n-k)!\,(n+k)!}. \quad (6.159)$$

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+ \qquad +\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}. \quad (6.160)$$

$$\binom{2n}{0}^2-\binom{2n}{1}^2+ \qquad +\binom{2n}{2n}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}= \\ =(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}. \quad (6.161)$$

$$\binom{2n+1}{0}^2-\binom{2n+1}{1}^2+\ldots-\binom{2n+1}{2n+1}^2=0. \quad (6.162)$$

$$\binom{n}{1}^2+2\binom{n}{2}^2+ \qquad +n\binom{n}{n}^2= \\ =(2n-1)\binom{2n-2}{n-1}=\frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}. \quad (6.163)$$

Биномиальная и полиномиальная формулы:

$$(a_1+a_2)^n=\sum_{\nu_1+\nu_2=n}\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!}a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2}. \quad (6.164)$$

$$(a_1+a_2+\ldots+a_p)^n= \\ =\sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_p=n}\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_p!}a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2}\ldots a_p^{\nu_p}. \quad (6.165)$$

Некоторые тождества, связанные с биномиальными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x. \tag{6.166}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x. \tag{6.167}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{6.168}$$

Многочлены Бернштейна $B_n(f)$ функции $f(x)$ определяются соотношением

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{6.169}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, то последовательность $B_n(f)$ равномерно сходится к $f(x)$ на этом интервале:

$$\lim_{n \to \infty} B_n(f) = f(x). \tag{6.170}$$

Асимптотические формулы:

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{\theta_n}{6n}}, \quad |\theta_n| < 1. \tag{6.171}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}} (n-m)^{n-m+\frac{1}{2}}} e^{\omega_n}, \quad \omega_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{6.172}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}^k \sim \frac{2^{kn}}{\sqrt{k}} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{k-1}{2}}. \tag{6.173}$$

$$\binom{nk+l}{n} \sim \frac{(k-1)^n}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{nk+l+\frac{1}{2}}, \qquad (6.174)$$

k и l — действительные, $k > 1$.

$$\binom{n+\beta}{\beta} = \frac{n^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \sum_{s=1}^{p} c_s n^{\beta-p} + O\left(n^{\beta-p-1}\right). \qquad (6.175)$$

Числа Фибоначчи и золотое сечение. Суммы

$$u_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n-(k+1)}{k} \qquad (6.176)$$

связаны соотношениями

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n > 2, \quad u_1 = u_2 = 1. \qquad (6.177)$$

Числа u_n называются *числами Фибоначчи*. Имеет место *формула Бине*

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \qquad (6.178)$$

Приведем последовательные значения чисел Фибоначчи u_1, u_2, u_3, ...:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Числа Фибоначчи возникают при разложении в цепную дробь числа $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\dots$. Здесь подходящие дроби имеют вид $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Число $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ называется иногда числом *золотого сечения*. Оно определяется как среднее пропорциональное между 1 и его дополнением до 1:

$$\alpha^2 = 1 \cdot (1-\alpha).$$

В античной эстетике считали, что, например, прямоугольник с отношением сторон α или эллипс с отношением осей α особенно приятны для глаза. Отсюда и название золотое сечение.

§ 2. Числа и многочлены Бернулли и Эйлера

1. Числа и многочлены Бернулли. Для получения степенных разложений многих функций оказываются полезными специальные последовательности чисел, например числа Бернулли и Эйлера.

1°. *Числами Бернулли* B_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ называются коэффициенты разложения в степенной ряд функции $t(e^t-1)^{-1}$ при $|t|<2\pi$:

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!}. \tag{6.179}$$

Эти числа появились у Я. Бернулли (Ars Conjectandi, 1713) в связи с задачей о суммировании степеней натуральных чисел. Числа B_n фигурируют в степенных разложениях функций $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{th} t$, $t\operatorname{ctg} t$, $t\operatorname{cth} t$ и др., в формуле суммирования Эйлера — Маклорена, в асимптотическом представлении гамма-функции Эйлера.

Не существует единообразия в обозначениях чисел Бернулли. В некоторых работах через B_n обозначают то, что в обозначениях данного параграфа есть $|B_n|$, или B_{2n}, или $|B_{2n}|$.

Рекуррентные соотношения. Из соотношения (6.179), переписанного в виде

$$t=(e^t-1)\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!},$$

после перемножения рядов в правой части и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях t, следует

$$C_{n+1}^1B_n+C_{n+1}^2B_{n-1}+\ldots+C_{n+1}^kB_{n-k+1}+\ldots \\ \ldots+C_{n+1}^nB_1+B_0=0 \tag{6.180}$$

или, в символической форме,

$$(1+B)^{n+1}-B^{n+1}=0, \tag{6.181}$$

где после возведения в степень по биномиальной формуле все показатели степени следует заменить индексами.

Так как

$$t(e^t-1)^{-1}-(-t)(e^{-t}-1)^{-1}=-t=$$
$$=2\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad (6.182)$$

то все числа Бернулли B_n с нечетными индексами, начиная с $n=3$, равны нулю. Все числа Бернулли с четными индексами отличны от нуля, причем B_{2n} положительны при n нечетных и отрицательны при n четных (см. (6.194))

Формула Лапласа

$$B_n=(-1)^n n!\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 0 \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \qquad (6.183)$$

дает явное выражение значения числа Бернулли через его номер.

Числа Бернулли рациональны. Это следует, например, из предыдущей формулы.

Теорема Штаудта. *Каждое число Бернулли B_n может быть представлено в форме*

$$B_n=C_n-\sum\frac{1}{k+1}, \qquad (6.184)$$

где C_n есть целое число, а сумма распространена на все $k>0$ такие, что $k+1$ — простое число, а k есть делитель n.

Например, для $n=6$ делителями n будут числа $k=1$, 2, 3, 6. Прибавляя к каждому из них единицу, имеем числа 2, 3, 4, 7, из которых простыми являются 2, 3, 7. Следовательно, $B_6=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$.

Некоторые числа Бернулли:

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},$$

$$B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=-\frac{1}{30},\quad B_{10}=\frac{5}{66},$$

$$B_{12}=-\frac{691}{2730},\quad B_{14}=\frac{7}{6},\quad B_{16}=-\frac{3617}{510},\quad B_{18}=\frac{43867}{798},$$

$$B_{20}=-\frac{174611}{330},\quad B_{22}=\frac{854513}{123},$$

$$B_{24}=-\frac{236364091}{2730},\quad B_{26}=\frac{8553103}{6},$$

$$B_{28}=-\frac{23749461029}{870},\quad B_{30}=\frac{8615841276005}{14322},$$

$$B_{32}=-\frac{7709321041217}{510},\quad B_{34}=\frac{2577687858367}{6},$$

$$B_{36}=-\frac{26315271553053477373}{1919190},$$

$$B_{38}=\frac{2929993913841559}{6},\quad B_{40}=-\frac{261082718496449122051}{13530}.$$

Некоторые степенные разложения с коэффициентами, выражающимися посредством чисел Бернулли. Так как $\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{t}{2}=\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}$, то из (6.179) следует после замены t на $2t$, что

$$t\operatorname{cth}t=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}t^{2n}}{(2n)!},\quad |t|<\pi. \tag{6.185}$$

Используя соотношения

$$it\operatorname{cth}it=t\operatorname{ctg}t,\quad \operatorname{tg}t=\operatorname{ctg}t-2\operatorname{ctg}2t,$$

$$t\operatorname{cosec}t=t\operatorname{ctg}t+t\operatorname{tg}\frac{t}{2},$$

$$\operatorname{th}t=2\operatorname{cth}2t-\operatorname{cth}t,$$

$$\operatorname{csch}t=-\operatorname{cth}t-\operatorname{cth}\frac{t}{2},$$

получим

$$t \operatorname{ctg} t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} t^{2n}, \quad |t| < \pi. \tag{6.186}$$

$$\operatorname{tg} t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-1)\, 2^{2n} (-1)^{n-1}}{(2n)!} B_{2n} t^{2n-1}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}. \tag{6.187}$$

$$t \operatorname{cosec} t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-2^{2n})(-1)^n}{(2n)!} B_{2n} t^{2n}, \quad |t| < \pi. \tag{6.188}$$

$$\operatorname{th} t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} t^{2n-1}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}. \tag{6.189}$$

$$t \operatorname{csch} t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} t^{2n-1}, \quad |t| < \pi. \tag{6.190}$$

$$\ln \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!\, 2n} t^{2n}, \quad |t| < \pi. \tag{6.191}$$

$$\ln \cos t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}(2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!\, 2n} t^{2n}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}. \tag{6.192}$$

$$\ln \frac{\operatorname{tg} t}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}(2^{2n-1}-1) B_{2n}}{n\,(2n)!} t^{2n}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}. \tag{6.193}$$

В ы р а ж е н и е с у м м н е к о т о р ы х ч и с л о в ы х р я д о в п о с р е д с т в о м ч и с е л Б е р н у л л и. Из сопоставления разложения (6.186) и

$$t \operatorname{ctg} t = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^2}{t^2 - m^2\pi^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{\pi^{2n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}}$$

следует

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}\, 2\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}}. \tag{6.194}$$

Из формулы (6.194) следуют равенства:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}. \tag{6.195}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n}. \tag{6.196}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}. \tag{6.197}$$

В частности,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = B_2\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}. \tag{6.198}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m^2} = \frac{B_2\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{12}. \tag{6.199}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{3B_2\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{6.200}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}. \tag{6.201}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6} = \frac{\pi^6}{945}. \tag{6.202}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^8} = \frac{\pi^8}{9450}. \tag{6.203}$$

Некоторые интегралы, выражающиеся посредством чисел Бернулли. Интегральные представления чисел Бернулли. Из соотношения

$$\frac{1}{m^{2n}} = \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-mt} t^{2n-1}\, dt$$

и (6.194) следуют соотношения:

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}4n\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t}-1}\,dt. \tag{6.204}$$

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}4\pi\int_0^\infty \frac{t^{2n}\,dt}{(e^{\pi t}-e^{-\pi t})^2}. \tag{6.205}$$

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2n(2n-1)}{\pi}\int_0^\infty t^{2n-2}\ln(1-e^{-2\pi t})\,dt. \tag{6.206}$$

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\left(\frac{p}{\pi}\right)^{2n}\frac{4n}{2^{2n}-1}\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}}{\operatorname{sh} pt}\,dt. \tag{6.207}$$

$$B_{2n}=(-1)^{n}\frac{n}{2^{2n-2}\pi^{2n}}\int_0^1 \frac{(\ln x)^{2n-1}}{1-x}\,dx. \tag{6.208}$$

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2n}{(1-2^{2n})\pi^{2n}}\int_0^\infty \frac{(\ln t)^{2n-1}}{1-t^2}\,dt. \tag{6.209}$$

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{4n}{(1-2^{2n})\pi^{2n}}\int_0^1 \frac{(\ln t)^{2n-1}}{1-t^2}\,dt. \tag{6.210}$$

$$B_{2n}=(-1)^{n}\frac{4n}{\pi^{2n}}\int_0^1 (\ln t)^{2n-1}\frac{t\,dt}{1-t^2}. \tag{6.211}$$

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}\int_0^1 (\ln t)^{2n}\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}\,dt. \tag{6.212}$$

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2n}{(1-2^{2n})\pi^{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \operatorname{tg} t)^{2n-1}\frac{dt}{\cos 2t}. \tag{6.213}$$

$$B_{2n+2}=(-1)^{n+1}\frac{2(n+1)(2n+1)}{\pi^{2n+2}}\int_0^1 (\ln t)^{2n}\ln(1-t^2)\frac{dt}{t}. \tag{6.214}$$

2°. Многочлены Бернулли определяются формулой

$$B_n(x) = (x+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}. \tag{6.215}$$

В ряде работ вместе с многочленами $B_n(x)$ вводятся многочлены

$$\varphi_n(x) = B_n(x) - B_n. \tag{6.216}$$

Из (6.215) следует, что

$$B_n(0) = B_n, \quad \varphi_n(0) = 0. \tag{6.217}$$

Производящей функцией для многочленов Бернулли является функция $te^{xt}(e^t - 1)^{-1}$. Ее разложение в степенной ряд, сходящееся при $|t| < 2\pi$, имеет вид

$$te^{xt}(e^t - 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{6.218}$$

Разностное уравнение

$$f(x+1) - f(x) = nx^{n-1} \tag{6.219}$$

удовлетворяется многочленом Бернулли. Это вытекает из (6.218) и соотношения

$$te^{(x+1)t}(e^t - 1)^{-1} - te^{xt}(e^t - 1)^{-1} = te^{xt}.$$

Рекуррентные формулы. Дифференцирование (6.215) дает

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \tag{6.220}$$

откуда

$$B_n(x) = B_n(0) + n\int_0^x B_{n-1}(x)\,dx. \tag{6.221}$$

Некоторые многочлены Бернулли:

$$B_0(x) = 1. \tag{6.222}$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}. \tag{6.223}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}. \tag{6.224}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x. \tag{6.225}$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}. \tag{6.226}$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x. \tag{6.227}$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}. \tag{6.228}$$

$$B_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x \tag{6.229}$$

$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30}. \tag{6.230}$$

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x. \tag{6.231}$$

$$B_{10}(x) = x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}. \tag{6.232}$$

Нули многочленов Бернулли. Имеет место формула

$$B_n(1 - x) = (-1)^n B_n(x), \tag{6.233}$$

откуда, при $x = 0$

$$B_n(1) = (-1)^n B_n, \tag{6.234}$$

и, так как $B_{2k+1} = 0$, то

$$B_n(1) - B_n = B_n(1) - B_n(0) = 0 \tag{6.235}$$

для всех n.

Из (6.216) и (6.235) вытекает, что

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0. \tag{6.236}$$

Из (6.233) при $n = 2k + 1$ для $x = \frac{1}{2}$ следует

$$B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{6.237}$$

или

$$\varphi_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0. \tag{6.238}$$

На отрезке [0, 1] многочлены $\varphi_n(x)$ с четными индексами обращаются в нуль в точках $x=0$ и $x=1$ и только в этих точках; многочлены $\varphi_n(x)$ с нечетными индексами обращаются в нуль в точках $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ и только в этих точках.

На интервале (0, 1) многочлены $\varphi_{2k}(x)$ с четными индексами знакопостоянны, имея знак $(-1)^k$; многочлен $\varphi_{2k+1}(x)$ имеет на интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ знак $(-1)^{k-1}$, а на интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ знак $(-1)^k$.

Теорема умножения для многочленов Бернулли:

$$B_n(mx)=m^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1} B_n\left(x+\frac{s}{m}\right). \tag{6.239}$$

Это соотношение следует из того, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(mx)\,t^n}{n!}=\frac{e^{mxt}t}{e^t-1}=\frac{1}{m}\,\frac{e^{mxt}mt\left(1+e^t+\ldots+e^{(m-1)t}\right)}{e^{mt}-1}=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{e^{\left(x+\frac{s}{m}\right)mt}\,mt}{e^{mt}-1}=\frac{1}{m}\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n\left(x+\frac{s}{m}\right)m^nt^n}{n!}. \tag{6.240}$$

Тригонометрические разложения многочленов Бернулли на интервале (0, 1):

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi mx}{m}. \tag{6.241}$$

$$B_2(x)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi mx}{m^2}. \tag{6.242}$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} B_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi mx}{m^{2n}}. \tag{6.243}$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} B_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^{2n}\pi^{2n+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi mx}{m^{2n+1}}. \tag{6.244}$$

Интегральные представления многочленов Бернулли на интервале (0, 1):

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n+1} 2n \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi x - e^{-2\pi t}}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x} t^{2n-1}\, dt \tag{6.245}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

$$B_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} (2n+1) \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi x}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x} t^{2n}\, dt \tag{6.246}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Применение к суммированию степеней натуральных чисел. Придавая x в (6.219) значения 0, 1, 2, ..., p и суммируя, получим

$$\sum_{s=1}^{p} s^{n-1} = \frac{B_n(p+1) - B_n}{n}$$

или, заменив $n-1$ на n,

$$\sum_{s=1}^{p} s^{n} = \frac{B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}}{n+1}. \tag{6.247}$$

Например:

$$\sum_{s=1}^{p} s^2 = \frac{B_3(p+1) - B_3}{3} = \frac{1}{3}\left(p^3 + \frac{3}{2}p^2 + \frac{p}{2}\right) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}. \tag{6.248}$$

$$\sum_{s=1}^{p} s^3 = \frac{B_4(p+1) - B_4}{4} = \frac{1}{4}(p^4 - 2p^3 + p^2) = \frac{p^2(p+1)^2}{4}. \tag{6.249}$$

$$\sum_{s=1}^{p} s^4 = \frac{B_5(p+1) - B_5}{5} = \frac{1}{5}\left(p^5 - \frac{5}{2}p^4 + \frac{5}{3}p^3 - \frac{p}{6}\right) = \\ = \frac{1}{30}p(p+1)(2p+1)(3p^2+3p-1). \quad (6.250)$$

$$\sum_{s=1}^{p} s^5 = \frac{B_6(p+1) - B_6}{6} = \frac{1}{6}\left(p^6 - 3p^5 + \frac{5}{2}p^4 - \frac{p^2}{2}\right) = \\ = \frac{1}{12}p^2(p+1)^2(2p^2+2p+1). \quad (6.251)$$

Формула Эйлера—Маклорена устанавливает связь между интегралами и суммами:

$$\int_0^m f(x)\,dx = \left[\frac{f(0)+f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} f(k)\right] - \\ - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{B_{2r}}{(2r)!}\left[f^{(2r-1)}(m) - f^{(2r-1)}(0)\right] - \frac{f^{(2n)}(\theta m)\, mB_{2n}}{(2n)!}. \quad (6.252)$$

Если функция $f(x)$ и все ее производные, встречающиеся в формуле (6.252), стремятся к нулю, а производные четного порядка отличны от нуля и все имеют один и тот же знак, то формула суммирования имеет место при $m = \infty$, если входящие в нее сумма и интеграл сходятся.

Формула Стирлинга получается из формулы Эйлера—Маклорена, если в последней положить $f(x) = \ln x$ и нижний предел интегрирования сделать равным единице:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \ln k = m\ln m - m - \frac{1}{2}\ln m + 1 + \\ + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{B_{2r}(m^{-2r+1} - 1)}{2r(2r-1)} - R_{n-1}. \quad (6.253)$$

При $n = 2$ из (6.253) вытекает *асимптотическая формула Стирлинга* для факториала (см. (6.121)):

$$m! \approx \sqrt{2\pi m}\, m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m}. \quad (6.254)$$

2. Числа и многочлены Эйлера. 1°. *Числами Эйлера* $E_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ называются коэффициенты разложения в степенной ряд функции

$$\operatorname{sch} t = \sum_{k=0}^{\infty} E_k \frac{t^k}{k!}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}. \tag{6.255}$$

Отсюда, в силу четности функции $\operatorname{sch} t = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$, числа Эйлера с нечетными индексами равны нулю

$$E_{2m+1} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{6.256}$$

Рекуррентные соотношения. Из (6.255) следует

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{\infty} E_k \frac{t^k}{k!}, \tag{6.257}$$

откуда $E_0 = 1$ и

$$E_0 + C_{2n}^2 E_2 + C_{2n}^4 E_4 + \ldots + C_{2n}^{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0. \tag{6.258}$$

В символической записи

$$(E+1)^n + (E-1)^n = 0, \quad E_0 = 1. \tag{6.259}$$

Некоторые числа Эйлера:

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385,$$
$$E_{10} = -50251, \quad E_{12} = 2702765$$
$$E_{14} = -199360981, \quad E_{16} = 19391512145,$$
$$E_{18} = -2404879675441, \quad E_{20} = 370371188237525.$$

Все эйлеровы числа целые. Это следует из рекуррентных формул для получения E_k. Знаки двух соседних чисел с четными индексами противоположны.

Теорема Сильвестра. *Если* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — *делители числа* $n - m$, *то разность* $E_{2n} - E_{2m}$ *делится на* *те из чисел* $2\alpha+1,\ 2\beta+1,\ 2\gamma+1,\ \ldots$, *которые являются простыми числами.*

Связь с числами Бернулли. Исходя из тождества

$$\frac{4x}{e^{4x}-1}-\frac{2x}{e^{2x}-1}=-\frac{2xe^{-x}}{e^{x}+e^{-x}},$$

получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n 2^n (2^n-1)\frac{x^n}{n!}=-\sum_{l=0}^{\infty} E_l\frac{x^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{m+1}}{m!},$$

откуда

$$B_n=-\frac{n(E-1)^{n-1}}{2^n(2^n-1)}. \tag{6.260}$$

Исходя из тождества

$$\frac{4x}{e^{4x}-1}(e^{3x}-e^{x})=\frac{4x}{e^{x}+e^{-x}},$$

получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m\frac{(4x)^m}{m!}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{(3x)^l}{l!}-\frac{x^l}{l!}\right]=2x\sum_{k=0}^{\infty}E_k\frac{x^k}{k!},$$

откуда

$$E_{k-1}=\frac{(4B+3)^k-(4B+1)^k}{2k}. \tag{6.261}$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\frac{2k+1}{2^{4k+1}}E_{2k}=\left(B+\frac{3}{4}\right)^{2k+1}-\left(B+\frac{1}{4}\right)^{2k+1}, \tag{6.262}$$

откуда, учитывая (6.215) и (6.233),

$$\frac{2k+1}{2^{4k+2}}E_{2k}=-2B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right). \tag{6.263}$$

Знаки чисел Эйлера. Как следует из изложенного на стр. 356, $B_{2k+1}(x)$ на интервале $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ имеет знак $(-1)^{k-1}$, следовательно, E_{2k} имеет знак $(-1)^k$.

Некоторые степенные разложения с коэффициентами, выражающимися посредством чисел Эйлера. Замечая, что $\sec t = \operatorname{sch} it$, получаем

$$\sec t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} t^{2k}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}. \tag{6.264}$$

Интегрируя последний ряд, получаем

$$\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right| = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k+1)!} t^{2k+1}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}. \tag{6.265}$$

Интегрирование ряда (6.255) дает

$$\operatorname{arctg} e^t = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} E_k \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{6.266}$$

Выражение сумм некоторых числовых рядов посредством чисел Эйлера. Полагая в (6.244) $x = \frac{1}{4}$ и учитывая (6.263), получаем

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \ldots = \frac{(-1)^k E_{2k} \pi^{2k+1}}{4^{k+1}(2k)!}. \tag{6.267}$$

Например,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}. \tag{6.268}$$

Интегральные представления чисел Эйлера. Из (6.246) и (6.263) следует

$$E_{2n} = (-1)^n 2^{2n+1} \int_0^{\infty} t^{2n} \operatorname{sch}(\pi t)\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.269}$$

2°. Многочлены Эйлера определяются формулой

$$E_n(x) = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{E}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-k} E_k \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}, \tag{6.270}$$

где E_k — числа Эйлера.

Производящей функцией для многочленов Эйлера является функция $2e^{xt}(e^t+1)^{-1}$. Ее разложение в степенной ряд, сходящееся при $|t|<\pi$, имеет вид

$$2e^{xt}(e^t+1)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} E_k(x)\frac{t^k}{k!}. \tag{6.271}$$

Разностное уравнение

$$f(x+1)+f(x)=2x^n \tag{6.272}$$

удовлетворяется многочленом Эйлера $E_n(x)$. Это следует из соотношения

$$2e^{(x+1)t}(e^t+1)^{-1}+2e^{xt}(e^t+1)^{-1}=2e^{xt}.$$

Рекуррентные формулы. Дифференцируя (6.270), получаем

$$E_n'(x)=nE_{n-1}(x), \tag{6.273}$$

откуда

$$E_n(x)=E_n\left(\frac{1}{2}\right)+n\int_{\frac{1}{2}}^{x} E_{n-1}(x)\,dx. \tag{6.274}$$

Так как $E_n\left(\frac{1}{2}\right)=2^{-n}E_n$ (см. (6.270)), то

$$E_n(x)=2^{-n}E_n+n\int_{\frac{1}{2}}^{x} E_{n-1}(x)\,dx. \tag{6.275}$$

Из соотношения

$$2e^{(x+1)t}(e^t+1)^{-1}=\sum_{r=0}^{\infty} E_r(x)\frac{t^r}{r!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}=\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x+1)\frac{t^n}{n!}$$

следует рекуррентная формула

$$E_n(x+1)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}E_r(x), \tag{6.276}$$

или, учитывая (6.272),

$$E_n(x) = 2x^n - \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} E_r(x). \qquad (6.277)$$

Некоторые многочлены Эйлера:

$$E_0(x) = 1. \qquad (6.278)$$

$$E_1(x) = x - \frac{1}{2}. \qquad (6.279)$$

$$E_2(x) = x^2 - x. \qquad (6.280)$$

$$E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}. \qquad (6.281)$$

$$E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x. \qquad (6.282)$$

$$E_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \qquad (6.283)$$

$$E_6(x) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x. \qquad (6.284)$$

$$E_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{35}{4}x^4 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{17}{8}. \qquad (6.285)$$

$$E_8(x) = x^8 - 4x^7 + 14x^5 - 28x^3 - 17x. \qquad (6.286)$$

Связь с многочленами Бернулли. Исходя из соотношения

$$te^{\frac{xt}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}} + 1\right)^{-1} = te^{(x+1)\frac{t}{2}}(e^t - 1)^{-1} - te^{\frac{xt}{2}}(e^t - 1)^{-1},$$

получаем

$$E_{n-1}(x) = n^{-1}2^n\left\{B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right\} =$$

$$= n^{-1}2\left\{B_n(x) - 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right\}. \qquad (6.287)$$

Тригонометрические разложения многочленов Эйлера. Используя тригонометрические разложения многочленов Бернулли на интервале $0 < x < 1$, получаем

$$E_{2k}(x) = (-1)^k 4(2k)! \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)\pi]^{-2k-1} \sin(2n+1)\pi x$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (6.288)$$

$$E_{2k+1}(x) =$$

$$= (-1)^{k+1} 4(2k+1)! \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)\pi]^{-2k-2} \cos(2n+1)\pi x$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \qquad (6.289)$$

Теорема умножения

$$E_n(mx) = m^n \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r E_n\left(x + \frac{r}{m}\right), \qquad m = 2k+1. \quad (6.290)$$

$$E_n(mx) = -2m^n (n+1)^{-1} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r B_{n+1}\left(x + \frac{r}{m}\right), \quad m = 2k. \quad (6.291)$$

Интегральные представления многочленов Эйлера получаются аналогично представлениям многочленов Бернулли

$$E_{2n}(x) = (-1)^n \, 4 \int_0^\infty \frac{t^{2n} \sin \pi x \operatorname{ch} \pi t}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x}\, dt \quad (6.292)$$

$$(0 < x < 1; \; n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$E_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \, 4 \int_0^\infty \frac{t^{2n+1} \cos \pi x \operatorname{sh} \pi t}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x}\, dt \quad (6.293)$$

$$(0 < x < 1; \; n = 0, 1, 2, \ldots).$$

§ 3. Простейшие кусочно-линейные функции и дельтаобразные функции

1. Кусочно-линейные функции. 1°. Абсолютная величина x (обозначается $|x|$):

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x, & x > 0. \end{cases} \quad (6.294)$$

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \quad |x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big|. \quad (6.295)$$

Биномиальное разложение, $|x| < 1$, $|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$:

$$|x| = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}(1-x^2)^k. \quad (6.296)$$

Приближение многочленами Бернштейна (см. § 1, п. 2) четной степени, $|x| \leqslant 1$:

$$|x| = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \sum_{k=1}^{n} k \binom{2n}{n-k} \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k\right]. \tag{6.297}$$

Приближение многочленами Фейера, $|x| \leqslant \pi$:

$$|x| = \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\right]. \tag{6.298}$$

Разложение по многочленам Лежандра $P_n(x)$ (см. гл. IV, § 4, п. 5), $|x| < 1$:

$$\left.\begin{gathered} |x| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \\ a_{2k+1} = 0, \quad a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{5}{8}, \quad a_{2k} = (-1)^{k+1}(4k+1)\frac{(2k-3)!!}{(2k+2)!!}. \end{gathered}\right\} \tag{6.299}$$

Разложение Фурье, $|x| < \pi$:

$$|x| = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}. \tag{6.300}$$

Интегральное представление:

$$|x| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2}\, dt. \tag{6.301}$$

Многоугольные функции, приближение непрерывных функций многоугольными. Пусть даны точки $A_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \quad n, \ldots)$. Функция

$$f_n(x) = y_0 + \frac{k_1}{2}[x - x_0 + |x - x_0|] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (k_{i+1} - k_i)[(x - x_i) + |x - x_i|], \tag{6.302}$$

где $k_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$, называется *многоугольной*, ее графиком является многоугольник $A_0A_1A_2 \ldots A_n$. Следует иметь в виду, что

$$\frac{1}{2}[x-\alpha+|x-\alpha|]=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant\alpha,\\ x-\alpha & \text{при} \quad x>\alpha.\end{cases}$$

Если $f(x)$ — функция, непрерывная на $[a, b]$, то разбиению $a=x_0<x_1<x_2< \ldots <x_n=b$ отвечает многоугольная функция, графиком которой является вписанный в график функции многоугольник с вершинами в точках (x_i, y_i), $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Каждая непрерывная функция есть равномерный предел многоугольных функций.

Учитывая разложения (6.296) — (6.301), получаем, что любая многоугольная функция, определенная на произвольном отрезке $[a, b]$, является пределом сходящейся равномерно на $[a, b]$ последовательности многочленов (*теорема Вейерштрасса*).

Базис Шаудера. Многоугольная функция

$$F_{\alpha\beta}(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}(|x-\alpha|-|2x-\alpha-\beta|+|x-\beta|), \quad \alpha<\beta, \tag{6.303}$$

равна нулю вне интервала (α, β); на интервале (α, β) графиком ее является равнобедренный треугольник с высотой 1:

$$\left.\begin{aligned} &F_{\alpha\beta}(x)=0, \quad x<\alpha, \quad x>\beta;\\ &F_{\alpha\beta}(x)=2x-2\alpha, \quad x<\frac{\alpha+\beta}{2};\\ &F_{\alpha\beta}(x)=-2x+2\beta, \quad x>\frac{\alpha+\beta}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{6.304}$$

Пусть $y=f(x)$ — непрерывная функция на интервале (α, β). Введем числа

$$d_{\alpha\beta}(f)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\frac{1}{2}[f(\alpha)+f(\beta)]. \tag{6.305}$$

Базисом Шаудера называется последовательность функций на $[0,1]$:

$$\left.\begin{aligned} &1, x, F_{01}(x), F_{0,\frac{1}{2}}(x), F_{\frac{1}{2},1}(x), F_{0,\frac{1}{4}}(x),\\ &F_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(x), \ldots, F_{\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}}(x), \ldots\\ &(i=0, 1, \ldots, 2^k-1; \quad k=0, 1, 2, \ldots).\end{aligned}\right\} \tag{6.306}$$

Любая непрерывная на интервале [0, 1] функция $f(x)$ разлагается, и притом однозначно, в ряд

$$f(x)=f(0)+[f(1)-f(0)]\,x+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2^k-1} d_{\frac{i}{2^k},\,\frac{i+1}{2^k}}(f)\,F_{\frac{i}{2^k},\,\frac{i+1}{2^k}}(x). \qquad (6.307)$$

Частичная сумма последнего ряда

$$s_n(x)=f(0)+[f(1)-f(0)]\,x+\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{2^k-1} d_{\frac{i}{2^k},\,\frac{i+1}{2^k}}(f)\,F_{\frac{i}{2^k},\,\frac{i+1}{2^k}}(x) \qquad (6.308)$$

имеет своим графиком ломаную, вписанную в кривую $y=f(x)$, с вершинами в точках $\left(\frac{i}{2^n},\ f\left(\frac{i}{2^n}\right)\right)$ $(i=0,\ 1,\ \quad 2^n)$.

Производные от функций базиса Шаудера образуют *систему функций Хаара* (см. (4.24) и (4.25)).

2°. Знак x (сигнатура): $\operatorname{sign} x$.

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad x<0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0,\\ 1 & \text{при} \quad x>0\end{cases} \qquad (6.309)$$

или

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & \text{при} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0\end{cases} \qquad (6.310)$$

или

$$\operatorname{sign} x=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx. \qquad (6.311)$$

Разложение Фурье:

$$\operatorname{sign} x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}, \qquad |x|<\pi. \qquad (6.312)$$

Разложение по многочленам Эрмита (см. гл. IV, § 4, п. 10):

$$\operatorname{sign} x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-2)!}{\sqrt{2\pi}\,2^{n-1}}\frac{2n}{n!}H_{2n+1}(x). \qquad (6.313)$$

Интегральное представление

$$\operatorname{sign} x = \lim_{T \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{xT} \frac{\sin t}{t}\, dt. \tag{6.314}$$

Последовательность знаков синуса (*функции Радемахера*)

$$\rho_k(t) = \operatorname{sign}(\sin 2k\pi t), \tag{6.315}$$

$$r_k(t) = \operatorname{sign}(\sin 2^k \pi t). \tag{6.316}$$

3°. Целая часть x (обозначения: $[x]$, $\operatorname{entiere} x$, $E(x)$). Если $x = n + r$, n — целое, $0 \leqslant r < 1$, то $[x] = n$.

Имеют место следующие соотношения:

$$[x + y] \geqslant [x] + [y]. \tag{6.317}$$

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right], \quad n \text{ — целое}. \tag{6.318}$$

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \qquad + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]. \tag{6.319}$$

Если p и q — взаимно простые целые числа, то

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}. \tag{6.320}$$

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \qquad + \left[\frac{n}{k}\right] + \qquad + \left[\frac{n}{n}\right] = $$
$$= s_1 + s_2 + \ldots + s_k + \ldots + s_n, \tag{6.321}$$

где s_k — число делителей числа k.

Разложение Фурье

$$x - [x] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n} \tag{6.322}$$
$$(x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Функция $\{x\} = x - [x]$ называется *дробной частью числа* x. Это есть периодическая функция с периодом, равным единице.

4°. Расстояние до ближайшего целого числа [обозначение: (x)]:

$$(x) = \min\{x - [x],\ 1 + [x] - x\}. \tag{6.323}$$

Функция (x) — периодическая с периодом, равным единице. Разложение Фурье:

$$(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(n+1)x}{(2n+1)^2}. \tag{6.324}$$

5°. Функция скачка $1(x)$ (единичная функция Хевисайда):

$$1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{6.325}$$

Прямоугольный импульс

$$1(x - \beta) - 1(x - \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < \alpha,\ x > \beta, \\ 1 & \text{при} \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \end{cases} \quad \beta > \alpha. \tag{6.326}$$

Если $f(x)$ — функция, непрерывная на $[a, b]$, то последовательность функций

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,[1(x - x_k) - 1(x - x_{k-1})] \tag{6.327}$$

равномерно стремится к $f(x)$ при неограниченном измельчании $[a, b]$ на частичные интервалы точками x_k:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

6°. Изображение некоторых кусочно-линейных функций при помощи интегралов и рядов:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\sin \xi a}{\xi}\cos \xi x\, d\xi = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < x < a, \\ 0 & \text{при} \quad x \geqslant a. \end{cases} \tag{6.328}$$

$$\int_0^{\infty} aJ_1(a\xi)\,J_0(\xi x)\,d\xi = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < x < a, \\ 0 & \text{при} \quad x > a. \end{cases} \tag{6.329}$$

$$\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{a} = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad 0 < x < \frac{1}{2}a, \\ -1 & \text{при} \quad \frac{1}{2}a < x < a. \end{cases} \tag{6.330}$$

$$\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^2}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{a}=x,\qquad 0\leqslant x\leqslant a,\tag{6.331}$$

$$\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{a}=1-\frac{x}{a},\qquad 0\leqslant x\leqslant a,\tag{6.332}$$

$$\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{a}=\begin{cases} x & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}a,\\ a-x & \text{при}\quad \frac{1}{2}a\leqslant x\leqslant a.\end{cases}\tag{6.333}$$

$$2\int_0^{\infty}\frac{\cos\frac{1-\theta}{\theta}u-\cos\frac{u}{\theta}}{\pi u^2}\cos\frac{ut}{\theta}\,du=$$
$$=\begin{cases} 1 & \text{при}\quad |t|\leqslant 1-\theta,\\ \frac{1}{\theta}(1-|t|) & \text{при}\quad 1-\theta\leqslant |t|\leqslant 1,\\ 0 & \text{при}\quad |t|\geqslant 1.\end{cases}\tag{6.334}$$

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\pi x^2}\cos tx\,dx=\begin{cases} 1-|t| & \text{при}\quad |t|\leqslant 1,\\ 0 & \text{при}\quad |t|\geqslant 1.\end{cases}\tag{6.335}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin az}{z}\cos zx\,dz=\begin{cases} 1 & \text{при}\quad 0\leqslant x<a,\\ \frac{1}{2} & \text{при}\quad x=a,\\ 0 & \text{при}\quad x>a.\end{cases}\tag{6.336}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}\,dx=\begin{cases} -1 & \text{при}\quad \alpha<0,\\ 0 & \text{при}\quad \alpha=0,\\ 1 & \text{при}\quad \alpha>0.\end{cases}\tag{6.337}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{T}\frac{\sin ht}{t}\cos(x-a)t\,dt=\begin{cases} 0 & \text{при}\quad x<a-h,\\ \frac{1}{2} & \text{при}\quad x=a-h,\\ 1 & \text{при}\quad a-h<x<a+h,\\ \frac{1}{2} & \text{при}\quad x=a+h,\\ 0 & \text{при}\quad x>a+h.\end{cases}\tag{6.338}$$

2. δ (дельта)-функция. Последовательность функций $\{u_\nu(x)\}$ называется *слабо сходящейся* на интервале (a, b), если для любой непрерывной функции $f(x)$ существует предел

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f(x)\,u_\nu(x)\,dx. \tag{6.339}$$

Если последовательность $\{u_\nu(x)\}$ удовлетворяет условиям:
I. Каково бы ни было $M>0$ при $|a|\leqslant M$, $|b|\leqslant M$

$$\left|\int_a^b u_\nu(x)\,dx\right| < K(M); \tag{6.340}$$

II. Для фиксированных a и b, $|a|>0$, $|b|>0$,

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b u_\nu(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при}\quad a<b<0\quad\text{или}\quad 0<a<b,\\ 1 & \text{при}\quad a<0<b,\end{cases} \tag{6.341}$$

то предел (6.339) существует, не зависит от выбора последовательности $\{u_\nu(x)\}$ и равен $f(0)$. При этом предельный элемент сходящейся (слабо) последовательности $\{u_\nu(x)\}$ *называют дельта-функцией*: $\delta(x)$. Итак,

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx=f(0). \tag{6.342}$$

Последовательности, удовлетворяющие условиям I и II, называются *дельтаобразными*.

Примеры дельтаобразных последовательностей:

$$u_\varepsilon(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},\quad \varepsilon>0,\quad u_\varepsilon(x)\to\delta(x), \tag{6.343}$$

$$u_t(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},\quad t>0,\quad u_t(x)\to\delta(x), \tag{6.344}$$

$$u_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\nu x}{x},\quad 0<\nu<\infty,\quad u_\nu(x)\to\delta(x). \tag{6.345}$$

Простейшие свойства дельта-функции:

$$\delta(-x)=\delta(x). \tag{6.346}$$

$$f(x')\,\delta(x'-x)=f(x)\,\delta(x'-x). \tag{6.347}$$

$$x\delta(x)=0. \tag{6.348}$$

$$\delta(\varphi(x))=\sum_s \frac{\delta(x-x_s)}{|\varphi'(x)|}=\sum_s \frac{\delta(x-x_s)}{|\varphi'(x_s)|}, \tag{6.349}$$

где x_s — простые корни уравнения $\varphi(x)=0$.

$$\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|}. \tag{6.350}$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2|x|}. \tag{6.351}$$

$$|x|\,\delta(x^2)=\delta(x). \tag{6.352}$$

Сходимость приводимых ниже разложений в ряды и интегралов понимается как слабая сходимость.

Разложение Фурье, $|x|\leqslant l$:

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi(x-x')}{l}. \tag{6.353}$$

Разложение по бесселевым функциям (см. § 4, п. 6), $0\leqslant r\leqslant R$:

$$\delta(r'-r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\sqrt{rr'}}{R^2}\,\frac{J_m\left(s_n\frac{r'}{R}\right)J_m\left(s_n\frac{r}{R}\right)}{J_m'(s_n)}. \tag{6.354}$$

Разложение по многочленам Лежандра, $|x|\leqslant 1$:

$$\delta(x'-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}P_n(x')\,P_n(x). \tag{6.355}$$

Разложение по многочленам Эрмита:

$$\delta(x'-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\,e^{-\frac{x^2+x'^2}{2}}H_n(x')\,H_n(x). \tag{6.356}$$

Интегральные представления. Интеграл Фурье:

$$\delta(x'-x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos k(x'-x)\,dk. \tag{6.357}$$

Интеграл Фурье — Бесселя:

$$\left.\begin{aligned}\delta(r'-r)&=\sqrt{rr'}\int_{0}^{\infty}J_m(kr)\,J_m(kr')\,dk,\\ \delta(r')&=r'\int_{0}^{\infty}kJ_0(kr')\,dk.\end{aligned}\right\} \tag{6.358}$$

Свертка:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\mu_1)\,\delta(t-\mu_2)\,dt=\delta(\mu_1-\mu_2). \tag{6.359}$$

Производные дельта-функции:

$$\delta(x)=1'(x). \tag{6.360}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\delta'(x-h)\,dx=-f'(h). \tag{6.361}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\delta^{(k)}(x-h)\,dx=(-1)^k f^{(k)}(h). \tag{6.362}$$

Ряды дельта-функций:

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx+\ldots=-\frac{1}{2}+\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi n). \tag{6.363}$$

$$\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx+\ldots=-\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\delta'(x-2\pi n). \tag{6.364}$$

$$\cos x+4\cos 2x+\ldots+n^2\cos nx+\ldots=-\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\delta''(x-2\pi n). \tag{6.365}$$

§ 4. Простейшие специальные функции

1. Эллиптические интегралы. Определения. Любой интеграл вида

$$\int_0^x \frac{R(x)}{\sqrt{P(x)}}\,dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция от x, а $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени, может быть преобразован к сумме интегралов, приводящих к элементарным функциям, и к интегралам, называемым *эллиптическими интегралами в лежандровой нормальной форме*. Это следующие интегралы:

Эллиптический интеграл первого рода

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \qquad (6.366)$$

Эллиптический интеграл второго рода

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \qquad (6.367)$$

Эллиптический интеграл третьего рода

$$\Pi(k, \lambda, \varphi) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{(1+\lambda x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \qquad (6.368)$$

Иногда применяются обозначения: $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ и $\Pi(\varphi, \lambda, k)$.

Параметр k называется *модулем* этих интегралов, а число λ — *параметром* интеграла третьего рода, $k^2 < 1$.

Число $k' = \sqrt{1-k^2}$ называется *дополнительным модулем*.

Вместо k часто вводится α, причем $k = \sin\alpha$.

Если положить $x = \sin\psi$, то эллиптические интегралы приводятся к *нормальной тригонометрической форме*:

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\Delta\psi}, \qquad (6.369)$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}\, d\psi = \int_0^\varphi \Delta\psi\, d\psi, \tag{6.370}$$

$$\Pi(k, \lambda, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{(1+\lambda \sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{(1+\lambda\sin^2\psi)\,\Delta\psi}, \tag{6.371}$$

где $\Delta\psi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}$.

Для нередко встречающейся комбинации этих интегралов принято обозначение

$$D(k, \varphi) = \frac{F(k, \varphi) - E(k, \varphi)}{k^2} = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\psi}{\Delta\psi}\, d\psi =$$

$$= \int_0^{\sin\varphi} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{6.372}$$

Представление в виде ряда:

$$F(k, \varphi) = A_0 + \frac{1}{2} A_1 k^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} A_2 k^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} A_3 k^6 + \ldots, \tag{6.373}$$

$$E(k, \varphi) = A_0 - \frac{1}{2} A_1 k^2 - \frac{1}{2\cdot 4} A_2 k^4 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} A_3 k^6 - \\ - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} A_4 k^8 - \ldots, \tag{6.374}$$

где

$$A_n = \int_0^\varphi \sin^{2n}\alpha\, d\alpha \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.375}$$

Коэффициенты A_n можно вычислять последовательно по формулам:

$$A_0 = \varphi, \quad A_n = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1} - \frac{1}{2n} \cos\varphi \sin^{2n-1}\varphi. \tag{6.376}$$

Если φ близко к $\frac{\pi}{2}$, то удобно пользоваться формулами:

$$F(k, \varphi) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F(k, \varphi_1), \tag{6.377}$$

$$E(k, \varphi) = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - E(k, \varphi_1) + k^2 \sin\varphi \sin\varphi_1, \tag{6.378}$$

где φ_1 определяется из равенства

$$\sin\varphi_1 = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{6.379}$$

Если верхний предел интегралов равен $\frac{\pi}{2}\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$, то получаются *полные эллиптические интегралы.*

Полный эллиптический интеграл первого рода

$$K=F\left(k,\ \frac{\pi}{2}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{6.380}$$

Полный эллиптический интеграл второго рода

$$E=E\left(k,\ \frac{\pi}{2}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\varphi\,d\varphi=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{6.381}$$

При этом

$$D=D\left(k,\ \frac{\pi}{2}\right)=\frac{K-E}{k^2}. \tag{6.382}$$

Представление в виде ряда и произведения:

$$K=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 k^{2n}\right\}. \tag{6.383}$$

$$E=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}. \tag{6.384}$$

$$D=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 k^{2n-2}. \tag{6.385}$$

$$K=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+k_n);\quad \text{где}\quad k_n=\frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}},\quad k_0=k. \tag{6.386}$$

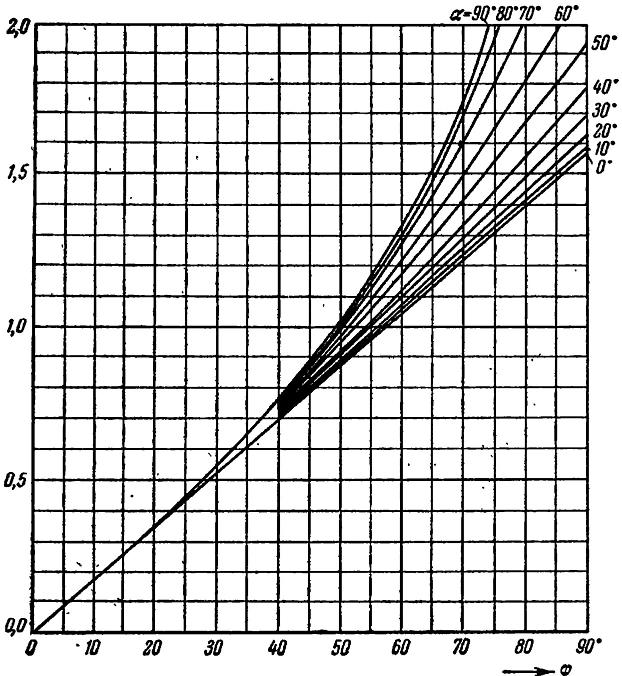

Рис. 5. Эллиптический интеграл первого рода $F(k, \varphi)$; $k = \sin\alpha = \mathrm{const}$.

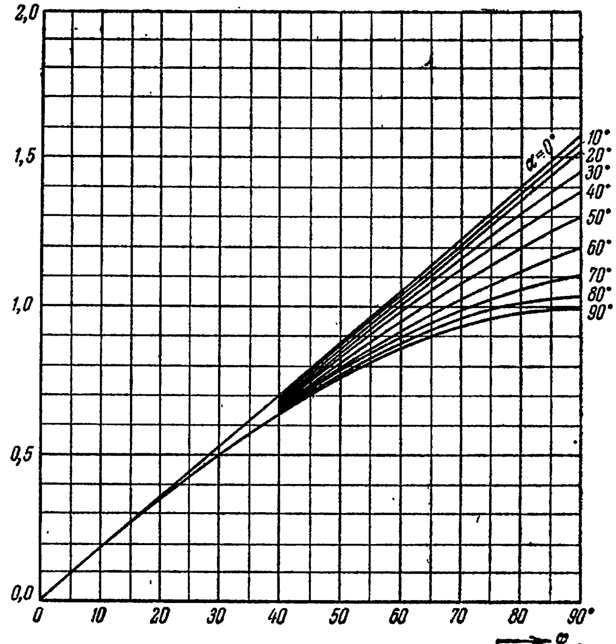

Рис. 6. Эллиптический интеграл второго рода $E(k, \varphi)$; $k = \sin\alpha = \mathrm{const}$.

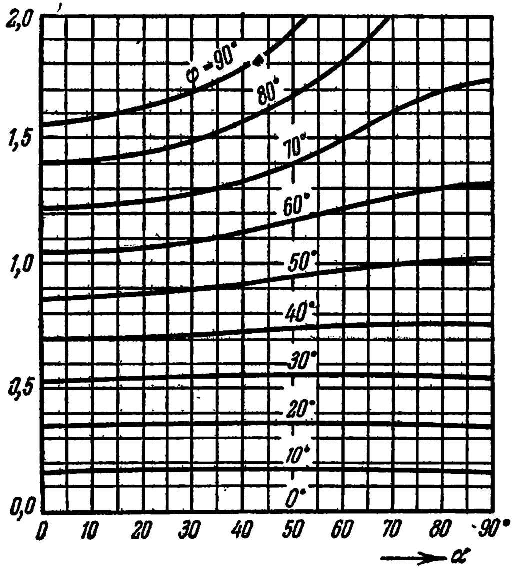

Рис. 7. Эллиптический интеграл первого рода $F(k, \varphi)$; $\varphi = \text{const}$, $k = \sin\alpha$.

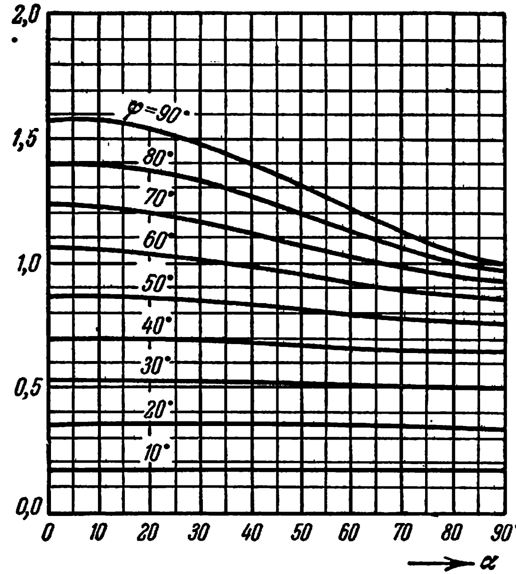

Рис. 8. Эллиптический интеграл второго рода $E(k, \varphi)$; $\varphi = \text{const}$, $k = \sin\alpha$.

При k, близких к 1, применяются формулы:

$$K = m + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (m-1)\, k'^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(m - 1 - \frac{2}{3\cdot 4}\right) k'^4 + \\ + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \left(m - 1 - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{2}{5\cdot 6}\right) k'^6 + \ldots \quad (6.387)$$

$$E = 1 + \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{1\cdot 2}\right) k'^2 + \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4}\left(m - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) k'^4 + \\ + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\left(m - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{1}{5\cdot 6}\right) k'^6 + \ldots \quad (6.388)$$

Здесь $m = \ln \frac{4}{k'}$.

Некоторые интегралы:

$$\int \frac{K\,dk}{k^2} = -\frac{1}{k} E = \frac{k^2 D - K}{k}. \quad (6.389)$$

$$\int \frac{E\,dk}{k^2} = \frac{k'^2 K - 2E}{k}. \quad (6.390)$$

$$\int Kk\,dk = E - k'^2 K = k^2 (K - D). \quad (6.391)$$

$$\int Ek\,dk = \frac{1+k^2}{3} E - \frac{k'^2}{3} K. \quad (6.392)$$

Графики эллиптических интегралов даны на рис. 5, 6, 7, 8.

2. Интегральные функции. Определения. *Интегральными функциями* называются следующие определенные интегралы:

Интегральная показательная функция

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt \qquad (x < 0). \quad (6.393)$$

Интегральный логарифм

$$\mathrm{li}(x) = \int_{0}^{x} \frac{dt}{\ln t} \qquad (0 < x < 1). \quad (6.394)$$

Интегральный синус

$$\mathrm{si}(x) = -\int_{x}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \left(\mathrm{si}\,0 = -\frac{\pi}{2}\right). \quad (6.395)$$

Интегральный косинус

$$\operatorname{ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \qquad (x > 0). \tag{6.396}$$

Кроме того, вводятся обозначения:

$$\operatorname{Si}(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \left[\operatorname{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}\right], \tag{6.397}$$

$$\operatorname{Ci}(x) = \operatorname{ci}(x). \tag{6.398}$$

При $x > 1$ функция $\operatorname{li}(x)$ определяется как

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t}\right].$$

При $x > 0$ функция $\operatorname{Ei}(x)$ принимает комплексные значения и через $\overline{\operatorname{Ei}}(x)$ обозначается действительная часть $\operatorname{Ei}(x)$. Впрочем, иногда черточка над Ei опускается.

Соотношения между интегральными функциями:

$$\operatorname{Ei}(\ln x) = \operatorname{li}(x) \qquad (x < 1). \tag{6.399}$$

$$\overline{\operatorname{Ei}}(\ln x) = \operatorname{li}(x) \qquad (x > 1). \tag{6.400}$$

$$\operatorname{li}(e^x) = \operatorname{Ei}(x) \qquad (x < 0). \tag{6.401}$$

$$\operatorname{Ei}(ix) = \operatorname{ci}(x) + i\operatorname{si}(x). \tag{6.402}$$

$$\operatorname{Ei}(x \pm i0) = \overline{\operatorname{Ei}}(x) \mp \pi i. \tag{6.403}$$

$$\operatorname{Si}(-x) = -\operatorname{Si}(x). \tag{6.404}$$

$$\operatorname{si}(-x) = -\operatorname{si}(x) - \pi. \tag{6.405}$$

$$\operatorname{Ci}(-x) = \operatorname{Ci}(x) \pm \pi i \qquad (x > 0). \tag{6.406}$$

$$\operatorname{Si}(2x) = \frac{\sin^2 x}{x} + \int_0^x \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt. \tag{6.407}$$

Представление в виде ряда

$$\operatorname{Ei}(x) = C + \ln(-x) + \sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k\,k!} \qquad (x < 0). \tag{6.408}$$

$$\overline{\mathrm{Ei}}(x)=C+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{kk!}\qquad (x>0). \tag{6.409}$$

$$\mathrm{li}(x)=C+\ln(-\ln x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^k}{kk!}\qquad (0<x<1). \tag{6.410}$$

$$\mathrm{li}(x)=C+\ln\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^k}{kk!}\qquad (x>1). \tag{6.411}$$

$$\mathrm{si}(x)=-\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!}. \tag{6.412}$$

$$\mathrm{ci}(x)=C+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k(2k)!}. \tag{6.413}$$

Здесь $C=0{,}57721\,56649\ldots$ — постоянная Эйлера (см. стр. 334).

Приближенные формулы (для малых значений x):

$$\mathrm{li}(x)\approx-\frac{x}{\ln\frac{1}{x}}. \tag{6.414}$$

$$\mathrm{Si}(x)\approx x. \tag{6.415}$$

$$\mathrm{si}(x)\approx x-\frac{\pi}{2}. \tag{6.416}$$

$$\mathrm{Ci}(x)\approx\overline{\mathrm{Ei}}(x)\approx\mathrm{Ei}(-x)\approx C+\ln x. \tag{6.417}$$

Асимптотические формулы (для больших значений x):

$$\overline{\mathrm{Ei}}(x)=\frac{e^x}{x}\left(1+\frac{1!}{x}+\frac{2!}{x^2}+\frac{3!}{x^3}+\ldots\right). \tag{6.418}$$

$$\mathrm{si}(x)=-\frac{\cos x}{x}\left(1-\frac{2!}{x^2}+\frac{4!}{x^4}-\ldots\right)-\frac{\sin x}{x}\left(\frac{1!}{x}-\frac{3!}{x^3}+\frac{5!}{x^5}-\ldots\right)\approx-\frac{\cos x}{x}. \tag{6.419}$$

$$\mathrm{ci}(x)=\frac{\sin x}{x}\left(1-\frac{2!}{x^2}+\frac{4!}{x^4}-\ldots\right)-\frac{\cos x}{x}\left(\frac{1!}{x}-\frac{3!}{x^3}+\frac{5!}{x^5}-\ldots\right)\approx\frac{\sin x}{x}. \tag{6.420}$$

$$\overline{\mathrm{Ei}}(x)\approx\frac{e^x}{x}. \tag{6.421}$$

$$\mathrm{Ei}(-x)\approx\frac{e^{-x}}{-x}. \tag{6.422}$$

Некоторые числовые значения:

$$\mathrm{Ei}(-1) = -0{,}21938\,3934\ \ldots \tag{6.423}$$

$$\overline{\mathrm{Ei}}(1) = 1{,}89511\,7816\ \ldots \tag{6.424}$$

$$\mathrm{li}(1{,}45136\,92346\ \ldots) = 0. \tag{6.425}$$

Некоторые пределы:

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{si}(x) = -\pi. \tag{6.426}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{ci}(x) = \pm \pi i. \tag{6.427}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [x^\rho \,\mathrm{si}(x)] = 0 \qquad (\rho < 1). \tag{6.428}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [x^\rho \,\mathrm{ci}(x)] = 0 \qquad (\rho < 1). \tag{6.429}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x}\, \overline{\mathrm{Ei}}(x) = 0. \tag{6.430}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-x}\, \overline{\mathrm{Ei}}(x) = 1. \tag{6.431}$$

Некоторые интегралы:

$$\int_0^x \mathrm{Ei}(-mt)\, dt = x\, \mathrm{Ei}(-mx) - \frac{1 - e^{-mx}}{m}. \tag{6.432}$$

$$\int_0^\infty e^{-pt}\, \mathrm{Ci}(qt)\, dt = -\frac{1}{p} \ln\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right). \tag{6.433}$$

$$\int_0^\infty e^{-pt}\, \mathrm{si}(qt)\, dt = -\frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{q}. \tag{6.434}$$

$$\int_0^\infty \cos t\, \mathrm{Ci}(t)\, dt = \int_0^\infty \sin t\, \mathrm{si}(t)\, dt = -\frac{\pi}{4}. \tag{6.435}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ci}^2(t)\, dt = \int_0^\infty \mathrm{si}^2(t)\, dt = \frac{\pi}{2}. \tag{6.436}$$

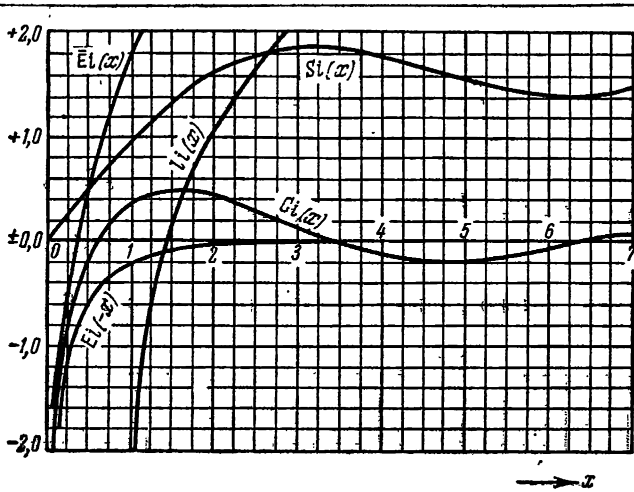

Рис. 9. Интегральные функции: синус Si (x), косинус Ci (x), логарифм li (x) и показательные функции Ei $(-x)$ и $\overline{\mathrm{Ei}}\,(x)$.

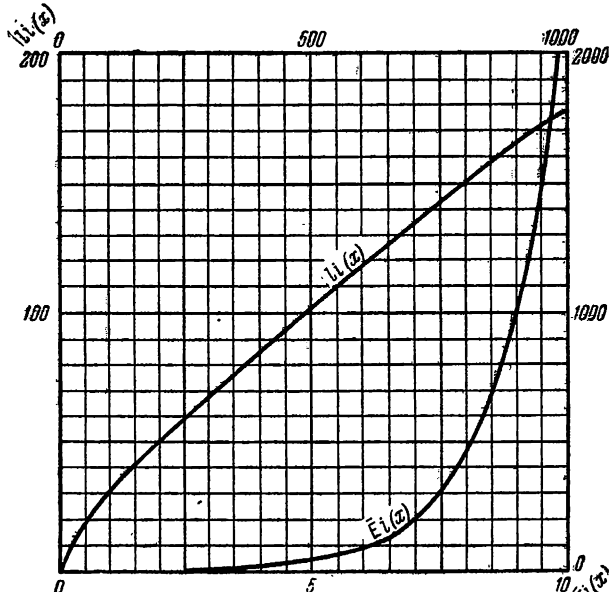

Рис. 10. Интегральная показательная функция $\overline{\mathrm{Ei}}\,(x)$ и интегральный логарифм li (x).

$$\int_0^\infty \mathrm{Ci}(t)\,\mathrm{si}(t)\,dt = -\ln 2. \tag{6.437}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{ci}(\alpha t)\,\mathrm{ci}(\beta t)\,dt = \int_0^\infty \mathrm{si}(\alpha t)\,\mathrm{si}(\beta t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\alpha} & \text{при } \alpha > \beta, \\ \dfrac{\pi}{2\beta} & \text{при } \alpha < \beta. \end{cases} \tag{6.438}$$

Графики интегральных функций даны на рис. 9, 10, 11.

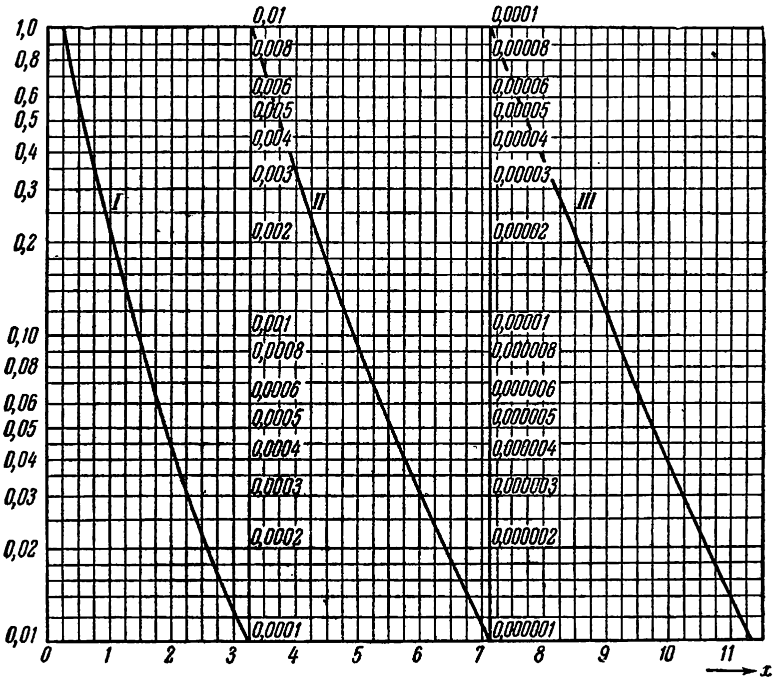

Рис. 11. Интегральная показательная функция $-\mathrm{Ei}(-x)$.

3. Интеграл вероятности. Определение. *Интегралом вероятности* называется функция

$$\mathrm{erf}\,x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad [\mathrm{erf}(\infty) = 1]. \tag{6.439}$$

Часто *интегралом вероятности* называется функция

$$\Phi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \tag{6.440}$$

или (по С. Н. Бернштейну)

$$\Phi_{\text{Б}}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\Phi(x)=\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \tag{6.441}$$

Встречаются также обозначения:

$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt, \tag{6.442}$$

$$L(x)=\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfc} x. \tag{6.443}$$

Соотношения между функциями $\operatorname{erf} x$ и $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \tag{6.444}$$

$$\operatorname{erf} x=\Phi\left(x\sqrt{2}\right). \tag{6.445}$$

Производные интеграла вероятности:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{erf} x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}. \tag{6.446}$$

$$\frac{d}{dx}\Phi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{6.447}$$

Интеграл от интеграла вероятности:

$$\int \operatorname{erf} x\,dx=x\operatorname{erf} x+\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}+C. \tag{6.448}$$

Другие интегральные представления:

$$\operatorname{erf} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt. \tag{6.449}$$

$$\operatorname{erf}(xy) = \frac{2y}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-y^2t^2}\, dt. \tag{6.450}$$

$$\operatorname{erf}(\sqrt{qx}) = \sqrt{\frac{q}{\pi}} \int_0^{x} \frac{e^{-qt}}{\sqrt{qt}}\, dt. \tag{6.451}$$

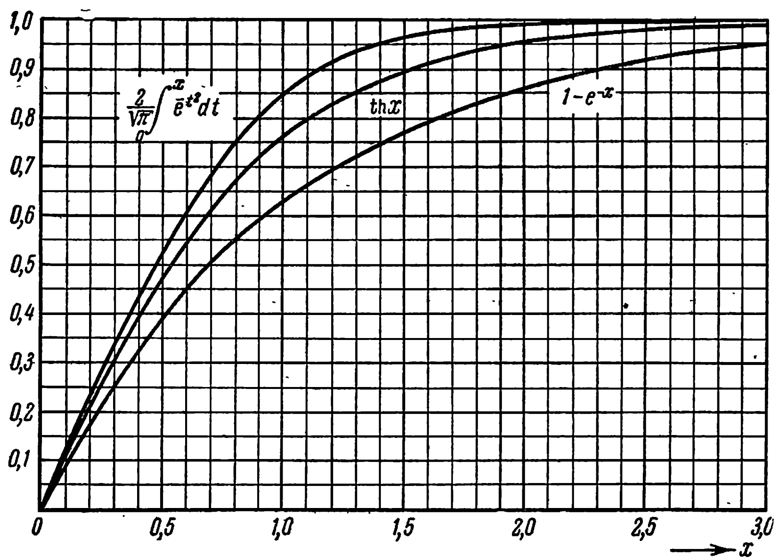

Рис. 12. Интеграл вероятности $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$

Представление в виде ряда:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}. \tag{6.452}$$

Асимптотические формулы:

$$\operatorname{erf}(\sqrt{x}) = 1 - \frac{1}{\pi} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{x^{k+\frac{1}{2}}} + \frac{e^{-x}}{\pi} R_n, \quad (6.453)$$

где

$$|R_n| < \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{|x|^{n+\frac{1}{2}} \cos\frac{\varphi}{2}}, \quad x = xe^{i\varphi} \quad \text{и} \quad \varphi^2 < \pi^2; \quad (6.454)$$

$$\operatorname{erfc} x \approx \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \ldots\right]. \quad (6.455)$$

График функции $\operatorname{erf} x$ приведен на рис. 12, на котором, кроме графика $\operatorname{erf} x$, даны для сравнения графики функций $\operatorname{th} x$ и $1 - e^{-x}$.

4. Интегралы Френеля. Определения. *Интегралами Френеля* называются следующие функции:
Синус-интеграл Френеля

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2\, dt \qquad \left[S(+\infty) = \frac{1}{2}\right], \quad (6.456)$$

Косинус-интеграл Френеля

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2\, dt \qquad \left[C(+\infty) = \frac{1}{2}\right]. \quad (6.457)$$

Иногда встречаются и такие определения интегралов Френеля:

$$S^*(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi}{2} t^2\, dt = S\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x\right), \quad (6.458)$$

$$C^*(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi}{2} t^2\, dt = C\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x\right). \quad (6.459)$$

Другие интегральные представления:

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt. \tag{6.460}$$

$$C(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{x^2}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt. \tag{6.461}$$

$$S(xy)=\frac{2y}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{x}\sin(y^2t^2)\,dt. \tag{6.462}$$

$$C(xy)=\frac{2y}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{x}\cos(y^2t^2)\,dt. \tag{6.463}$$

Представление в виде ряда:

$$S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+3}}{(2k+1)!\,(4k+3)}. \tag{6.464}$$

$$C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+1}}{(2k)!\,(4k+1)}. \tag{6.465}$$

Асимптотические формулы:

$$S(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\cos x^2+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\qquad (x\to\infty). \tag{6.466}$$

$$C(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\sin x^2+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\qquad (x\to\infty). \tag{6.467}$$

Связь интегралов Френеля с функциями Бесселя и интегралом вероятности:

$$S(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{x^2}J_{\frac{1}{2}}(t)\,dt. \tag{6.468}$$

$$C(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{x^2}J_{-\frac{1}{2}}(t)\,dt. \tag{6.469}$$

$$C(z)+iS(z)=\sqrt{\frac{i}{2}}\,\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z e^{it^2}\,dt. \qquad (6.470)$$

$$C(z)-iS(z)=\frac{1}{\sqrt{2i}}\,\mathrm{erf}\left(z\sqrt{i}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z e^{-it^2}\,dt. \qquad (6.471)$$

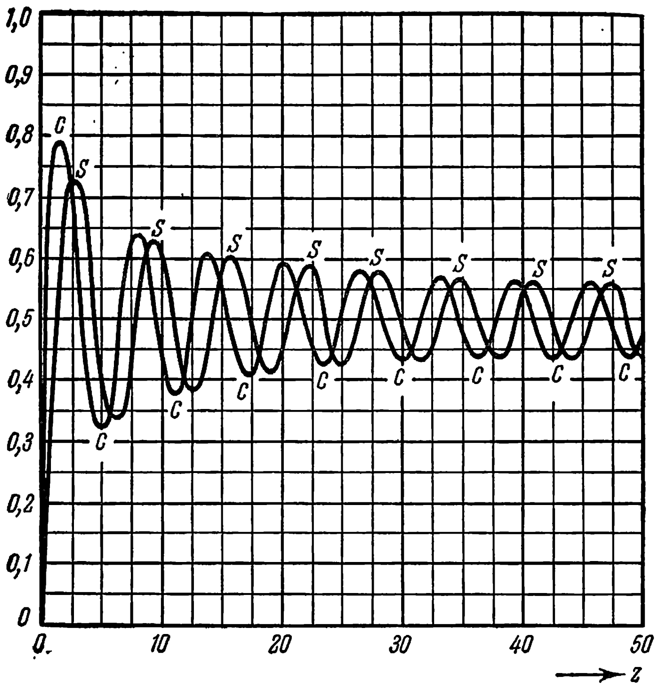

Рис. 13. Интегралы Френеля $S(x)$ и $C(x)$, $x^2=z$.

Некоторые пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} S(x)=\lim_{x\to+\infty} C(x)=\frac{1}{2}. \qquad (6.472)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{x^{\rho}\left[S(x)-\frac{1}{2}\right]\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left\{x^{\rho}\left[C(x)-\frac{1}{2}\right]\right\}=0 \quad (\rho<1). \qquad (6.473)$$

Некоторые интегралы:

$$\int_0^p S(\alpha x)\,dx = pS(\alpha p) + \frac{\cos(\alpha^2 p^2) - 1}{\alpha\sqrt{2\pi}}. \tag{6.474}$$

$$\int_0^p C(\alpha x)\,dx = pC(\alpha p) - \frac{\sin(\alpha^2 p^2)}{\alpha\sqrt{2\pi}}. \tag{6.475}$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - S(x)\right] \sin 2px\,dx = -\frac{2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}}{\pi}\,\frac{\sin\frac{p^2}{2}}{p} \quad (p > 0). \tag{6.476}$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - C(x)\right] \sin 2px\,dx = -\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}}{\pi}\,\frac{\sin\frac{p^2}{2}}{p} \quad (p > 0). \tag{6.477}$$

Графики интегралов Френеля даны на рис. 13.

5. Гамма- и бета-функции Эйлера. Важными неэлементарными функциями являются так называемые В- и Г-*функции Эйлера*. Эти функции, определяемые несобственными интегралами, зависящими от параметров, хорошо изучены, для них составлены достаточно подробные таблицы.

Ниже приводятся основные свойства этих функций. Все содержащиеся в формулах параметры действительные. Используемые операции дифференцирования, интегрирования, перемены порядка интегрирования, суммирования и т. д. законны, ибо рассматриваемые интегралы при соответствующих значениях параметров абсолютно и равномерно сходящиеся.

1°. Определение, функциональные уравнения и простейшие свойства Г (гамма)-функции Эйлера. Для $\alpha > 0$ *гамма-функция Эйлера* определяется интегралом

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx. \tag{6.478}$$

Замена переменных приводит к формулам:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx, \tag{6.479}$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha x}e^{-e^x}\,dx. \tag{6.480}$$

Интегрирование по частям (6.478) дает

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \tag{6.481}$$

и вообще, для целых n и $\alpha>0$ имеем

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1). \tag{6.482}$$

Полагая в (6.482) $\alpha=n$ — целое, получаем

$$\Gamma(n)=(n-1)! \tag{6.483}$$

Продолжение гамма-функции на отрицательную полуось осуществляется по формуле

$$\Gamma(\alpha-1)=\frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1} \tag{6.484}$$

или

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \tag{6.485}$$

сначала на интервал $(-1,\ 0)$, затем на интервал $(-2,\ -1)$, так что при $-n<x<-(n-1)$

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}, \tag{6.486}$$

откуда при $0<\alpha<1$

$$\Gamma(\alpha-n)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}. \tag{6.487}$$

Функция $\Gamma(x+1)$ часто обозначается символом $\Pi(x)$.

Гамма-функция разрывна при всех целых отрицательных значениях аргумента, ибо из (6.485) следует, что

$$\lim_{\substack{x\to-n\\ x>-n}}|x^{-1}\Gamma(x+1)|=\infty. \tag{6.488}$$

Из (6.478) следует, что в точках непрерывности гамма-функции ее производные вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \Gamma'(\alpha) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x\,dx, \\ \Gamma^{(k)}(\alpha) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}(\ln x)^k\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (6.489)$$

Примечание. *Алгебраическим дифференциальным уравнением* n-го порядка называется уравнение вида

$$F(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)) = 0,$$

где F — многочлен относительно своих аргументов x, $y(x)$, $y'(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$. Функция $y(x)$ называется *гипертрансцендентной*, если она не является решением никакого алгебраического дифференциального уравнения с коэффициентами — многочленами. Функция $\Gamma(x)$ является гипертрансцендентной функцией.

Например, $y(x) = \sin x$ является решением алгебраического уравнения $y'^2 + y^2 = 1$, и поэтому не является гипертрансцендентной функцией.

Простейшая асимптотическая формула. Из оценки (при $0 < \alpha < 1$)

$$n^\alpha\Gamma(n) - e^{-n}n^{\alpha+n-1} < \Gamma(\alpha+n) =$$

$$= \int_0^n + \int_n^\infty < n^{\alpha-1}\Gamma(n+1) + e^{-n}n^{\alpha+n-1} \qquad (6.490)$$

следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,n^{\alpha-1}} = 1. \qquad (6.491)$$

Представление гамма-функции в виде ряда указано в гл. III, § 3, п. 16.

Выражение $\Gamma(\alpha)$ и $\Gamma^{-1}(\alpha)$ в виде бесконечных произведений. Из (6.491) после замены $\Gamma(\alpha+n)$ по формуле (6.482) следует *формула Эйлера — Гаусса*

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}, \qquad (6.492)$$

или

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{n!}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\alpha+\nu)} \tag{6.493}$$

Из последней формулы, учитывая преобразование

$$\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\alpha+\nu)}{n!\, n^{\alpha}} = \frac{\alpha}{n^{\alpha}} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right) =$$

$$= e^{-\alpha \ln n + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha}{\nu}} \alpha \prod_{\nu=1}^{n} \left(\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right) e^{-\frac{\alpha}{\nu}}\right),$$

получается *формула Вейерштрасса*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \Gamma^{-1}(\alpha) = e^{C\alpha} \alpha \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right) e^{-\frac{\alpha}{\nu}}\right), \tag{6.494}$$

где C — постоянная Эйлера — Маскерони (6.56).

Формула дополнения

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \tag{6.495}$$

следует из (6.493) и формулы

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} = \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1-\frac{\alpha^2}{\nu^2}\right).$$

В частности, из (6.495) следует

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{6.496}$$

Так как из формулы дополнения получается

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{n-1}{n}\pi}, \tag{6.497}$$

то в силу соотношения

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

имеет место формула (*произведение Эйлера*)

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}. \qquad (6.498)$$

Формула умножения

$$\prod_{\nu=0}^{k-1} \Gamma\left(\alpha + \frac{\nu}{k}\right) = (2\pi)^{\frac{k-1}{2}} k^{-k\alpha + \frac{1}{2}} \Gamma(k\alpha), \quad \alpha > 0, \ k \text{ — целое} \geqslant 1, \qquad (6.499)$$

следует из (6.493). При $k=2$ получается *формула удвоения* (*Лежандр*)

$$\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\, 2^{-2\alpha + \frac{1}{2}} \Gamma(2\alpha). \qquad (6.500)$$

Логарифм гамма-функции. Логарифмирование (6.493) и переход к интегралам приводит к интегральному представлению логарифма гамма-функции:

$$\ln \alpha \Gamma(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{n}{n+\alpha} - \alpha \ln \frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{e^{nx} - e^{(n+\alpha)x}}{x} - \alpha \frac{e^{nx} - e^{(n+1)x}}{x}\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1 - e^{\alpha x} - \alpha(1 - e^{x})}{x(1 - e^{x})} e^{x}\, dx,$$

$$\ln \Gamma(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{e^{\alpha x} - e^{x}}{e^{x} - 1} - (\alpha - 1) e^{x}\right] \frac{dx}{x}. \qquad (6.501)$$

Другие интегральные представления:

$$\ln\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty\left[(\alpha-1)e^{-t}+\frac{(1+t)^{-\alpha}-(1+t)^{-1}}{\ln(1+t)}\right]\frac{dt}{t},\quad \alpha>0, \tag{6.502}$$

$$\ln\Gamma(\alpha)=\int_0^1\left[\frac{t^\alpha-t}{t-1}-t(\alpha-1)\right]\frac{dt}{t\ln t},\qquad \alpha>0. \tag{6.503}$$

Формула Раабе. Логарифмирование произведения Эйлера (6.498) дает

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\ln 2\pi-\frac{1}{2n}\ln n,$$

откуда при

$$\frac{k}{\alpha}=\alpha,\quad \frac{1}{n}=d\alpha,\quad n\to\infty$$

следует

$$\int_0^1 \ln\Gamma(\alpha)\,d\alpha=\ln\sqrt{2\pi}. \tag{6.504}$$

Дифференцированием по параметру вычисляется *интеграл Раабе*:

$$J=\int_0^1\ln\Gamma(\alpha+x)\,dx=$$
$$=\alpha(\ln\alpha-1)+\ln\sqrt{2\pi}. \tag{6.505}$$

Другое выражение для интеграла Раабе получается интегрированием (6.501)

$$J=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x}\left[\frac{e^{\alpha x}}{x}-\frac{e^x}{e^x-1}-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)e^x\right]. \tag{6.506}$$

Из формул (6.501), (6.506) следует

$$\ln\Gamma(\alpha)-J+\frac{\ln\alpha}{2}=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,e^{\alpha x}\,dx, \tag{6.507}$$

где

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right).$$

Вводя *функцию Бине*

$$\omega(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,e^{\alpha x}\,dx, \tag{6.508}$$

получаем асимптотическое выражение для логарифма гамма-функции

$$\ln\Gamma(\alpha)=\ln\sqrt{2\pi}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\ln\alpha-\alpha+\omega(\alpha). \tag{6.509}$$

Из (6.501) и (6.506) следует также

$$J-\ln\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=\int\limits_{-\infty}^{0} F(x)\,e^{\alpha x}\,dx, \tag{6.510}$$

где

$$F(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x-1}\right).$$

Отсюда следует асимптотическая формула для $\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$:

$$\ln\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=\alpha(\ln\alpha-1)+\ln\sqrt{2\pi}-\omega_1(\alpha), \tag{6.511}$$

где

$$\omega_1(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{0} F(x)\,e^{\alpha x}\,dx. \tag{6.512}$$

Имеет место соотношение

$$\omega_1(\alpha)=\omega(\alpha)-\omega(2\alpha), \tag{6.513}$$

получающееся из прологарифмированной формулы удвоения (6.500) с заменой $\ln\Gamma(\alpha)$ и $\ln\Gamma(2\alpha)$ по (6.509) и $\ln\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$ по (6.511).

Шаару принадлежат формулы:

$$\omega(\alpha)=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,e^{\alpha x}\,dx=\sum_{1}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{2e^{\alpha x}\,dx}{x^2+4k^2\pi^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\infty}\frac{\alpha\,dx}{\alpha^2+x^2}\ln(1-e^{2\pi x}). \qquad (6.514)$$

$$\omega_1(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\infty}\frac{\alpha\,dx}{\alpha^2+x^2}\ln(1-e^{2\pi x})-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\infty}\frac{2\alpha\,dx}{4\alpha^2+x^2}\ln(1-e^{2\pi x})=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\alpha\,dx}{\alpha^2+x^2}\ln(1+e^{2\pi x}). \qquad (6.515)$$

Асимптотические формулы Стирлинга и Гаусса. Используя формулы (6.179) и (6.508), получаем для функции Бине *ряд Стирлинга*

$$\omega(\alpha)=\frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{\alpha}+\frac{B_4}{3\cdot 4}\frac{1}{\alpha^3}+$$

$$+\frac{B_{2n-2}}{(2n-1)(2n-2)}\frac{1}{\alpha^{2n-3}}+R, \qquad (6.516)$$

где

$$R=\theta\frac{B_{2n}}{(2n-1)\,2n}\frac{1}{\alpha^{2n-1}}, \qquad 0<\theta<1. \qquad (6.517)$$

При $n=1$

$$\omega(\alpha)=\theta\frac{B_2}{2\alpha}=\frac{\theta}{12\alpha}$$

и из (6.509) вытекает *формула Стирлинга*

$$\ln\Gamma(\alpha)=\ln\sqrt{2\pi}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\ln\alpha-\alpha+\frac{\theta}{12\alpha}, \qquad (6.518)$$

$$\Gamma(\alpha)=\sqrt{2\pi}\,\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\alpha+\frac{\theta}{12\alpha}}. \qquad (6.519)$$

При α, равном целому m, снова получается формула Стирлинга

$$m!=\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m e^{\frac{\theta}{12m}}. \qquad (6.520)$$

Из (6.513) и (6.516) следует асимптотическая формула для $\omega_1(\alpha)$:

$$\omega_1(\alpha) = \frac{B_2}{1^2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\alpha} + \frac{B_4}{3\cdot 4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\frac{1}{\alpha^3} + \\ + \frac{B_6}{5\cdot 6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\frac{1}{\alpha^5} + \qquad (6.521)$$

В частности,

$$\omega_1(\alpha) = \theta\frac{B_2}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\alpha} = \frac{\theta}{24\alpha}, \qquad 0 < \theta < 1. \qquad (6.522)$$

Из (6.522) следует формула Гаусса

$$\ln\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) = \alpha(\ln\alpha - 1) + \ln\sqrt{2\pi} - \frac{\theta}{24\alpha}. \qquad (6.523)$$

При n целом и $\alpha = n + \frac{1}{2}$ имеет место формула для факториала, дающая лучшее приближение чем формула Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\theta}{24n+12}}. \qquad (6.524)$$

С т е п е н н о е р а з л о ж е н и е л о г а р и ф м а г а м м а - ф у н к ц и и. Из (6.481) и (6.493) следует

$$\ln\Gamma(1+\alpha) = \ln\alpha\Gamma(\alpha) = \ln\alpha + \ln\Gamma(\alpha) =$$

$$= \int_1^\alpha \frac{d\alpha}{\alpha} + \int_1^\alpha \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\,d\alpha = \int_1^\alpha\left[-C + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+\alpha}\right)\right]d\alpha =$$

$$= \int_1^\alpha\left[-C + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\nu^2} - \frac{\alpha^2}{\nu^3} + \frac{\alpha^3}{\nu^4} - \frac{\alpha^4}{\nu^5} + \ldots\right)\right]d\alpha =$$

$$= -C\alpha + \frac{s_2}{2}\alpha^2 - \frac{s_3}{3}\alpha^3 + \frac{s_4}{4}\alpha^4 + \qquad (6.525)$$

где

$$s_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \qquad + \frac{1}{n^p} +$$

Тригонометрическое разложение логарифма гамма-функции (ряд Куммера). Если при $x \in (0,\ 1]$

$$\ln \Gamma(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi\alpha + b_n \sin 2n\pi\alpha), \tag{6.526}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2n\pi x\, dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \\ b_n &= 2\int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin 2n\pi x\, dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{6.527}$$

то в силу формулы дополнения

$$\ln \Gamma(\alpha) + \ln \Gamma(1-\alpha) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos 2n\pi\alpha =$$

$$= \ln 2\pi - \ln \sin \pi x = \ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n}, \tag{6.528}$$

откуда

$$\frac{1}{2} a_0 = \ln \sqrt{2\pi}, \quad a_n = \frac{1}{2n} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{6.529}$$

Из (6.502) и (6.64) имеем

$$b_n = 2\int_0^1 \frac{dt}{\ln t} \int_0^1 \left(\frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1\right) \sin 2n\pi x\, dx =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+u^2} - e^{-2n\pi u}\right) \frac{du}{u} = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+u^2} - e^{-u}\right) \frac{du}{u} +$$

$$+ \frac{1}{n\pi} \int_0^{\infty} (e^{-u} - e^{-2n\pi u}) \frac{du}{u} = \frac{1}{n\pi} (C + \ln 2n\pi). \tag{6.530}$$

Другие разложения логарифма гамма-функции:

$$\ln \Gamma(1+\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} - C\alpha - \frac{s_3}{3}\alpha^3 - \frac{s_5}{5}\alpha^5 - \qquad (6.531)$$

$$\ln \Gamma(1+\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + $$
$$+ (1-C)\alpha - (s_3 - 1)\frac{\alpha^3}{3} - (s_5 - 1)\frac{\alpha^5}{5} - \qquad (6.532)$$

Логарифмическая производная гамма-функции (пси- или дигамма-функция). По определению,

$$\left.\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{d}{d\alpha} \ln \Gamma(\alpha); \\ \Psi(\alpha) &= \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{d}{d\alpha} \ln \Gamma(\alpha+1), \end{aligned}\right\} \qquad (6.533)$$

следовательно,

$$\Psi(\alpha) = \psi(\alpha) + \frac{1}{\alpha}.$$

Функция $\psi(\alpha)$ удовлетворяет функциональным уравнениям:

$$\psi(1+\alpha) - \psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}. \qquad (6.534)$$

$$\psi(\alpha) - \psi(1-\alpha) = -\pi \operatorname{ctg} \pi\alpha. \qquad (6.535)$$

$$\psi(\alpha) - \psi(-\alpha) = -\pi \operatorname{ctg} \pi\alpha - \frac{1}{\alpha}. \qquad (6.536)$$

$$\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha) = -\pi \operatorname{ctg} \pi\alpha + \frac{1}{\alpha}. \qquad (6.537)$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) - \psi\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = \pi \operatorname{tg} \pi\alpha. \qquad (6.538)$$

$$\psi(m\alpha) = m^{-1} \sum_{r=0}^{m-1} \psi\left(\alpha + \frac{r}{m}\right) + \ln m. \qquad (6.539)$$

Из (6.492) следует формула

$$\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = -\frac{1}{\alpha} - C + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+\alpha}\right). \qquad (6.540)$$

или вследствие того, что

$$0=1-\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right),$$

$$\psi(\alpha)=-C+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+\alpha}\right). \qquad (6.541)$$

Из (6.541) следует

$$\psi(\alpha)=-C+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\int_0^1 t^{\nu}\,dt-\int_0^1 t^{\nu+\alpha-1}\,dt\right)=$$

$$=-C+\int_0^1 \frac{1-t^{\alpha-1}}{1-t}\,dt. \qquad (6.542)$$

После замены переменной $1+y=t^{-1}$, с учетом (6.63), получается *формула Коши*

$$\psi(\alpha)=\int_0^{\infty}\left[e^{-y}-\frac{1}{(1+y)^{\alpha}}\right]\frac{dy}{y}, \qquad \alpha>0. \qquad (6.543)$$

Другие интегральные представления:

$$\psi(\alpha)=-C+\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-t\alpha}}{1-e^{-t}}\,dt, \qquad \alpha>0. \qquad (6.544)$$

$$\psi(\alpha)=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-t\alpha}}{1-e^{-t}}\right)dt, \qquad \alpha>0. \qquad (6.545)$$

$$\psi(\alpha)=\ln\alpha-\frac{1}{2\alpha}-2\int_0^{\infty}\frac{t\,dt}{(t^2+\alpha^2)(e^{2\pi t}-1)}, \qquad \alpha>0. \qquad (6.546)$$

$$\psi(\alpha)=\int_0^1\left(\frac{1}{-\ln t}-\frac{t^{\alpha-1}}{1-t}\right)dt, \qquad \alpha>0. \qquad (6.547)$$

$$\psi(\alpha)=\int_0^{\infty}\left[(1+t)^{-1}-(1+t)^{-\alpha}\right]\frac{dt}{t}-C, \qquad \alpha>0. \qquad (6.548)$$

Некоторые частные значения гамма-функции и ее производных:

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1. \tag{6.549}$$

$$\Gamma(0,5)=\sqrt{\pi}. \tag{6.550}$$

$$\Gamma(-0,5)=-2\sqrt{\pi}. \tag{6.551}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!! \tag{6.552}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=(-1)^n\frac{2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}. \tag{6.553}$$

$$\psi(1)=-C. \tag{6.554}$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-C-2\ln 2. \tag{6.555}$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right)=-C-\frac{\pi}{2}-3\ln 2. \tag{6.556}$$

$$\psi\left(\frac{3}{4}\right)=-C+\frac{\pi}{2}-3\ln 2. \tag{6.557}$$

$$\psi'(1)=\frac{\pi^2}{6}. \tag{6.558}$$

$$\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}. \tag{5.559}$$

Графики $\Gamma(x)$, $\Pi(x)$, $\frac{1}{\Gamma(x)}$ и $\frac{1}{\Pi(x)}$ даны на рис. 14 и 15.

Свойства гамма-функции, однозначно определяющие ее. Функция $F(x)$, непрерывная вместе со своей производной при $x>0$, есть гамма-функция $\Gamma(x)$, если она удовлетворяет какой-либо группе условий из числа приведенных ниже:

I. а) $F(x+1)=xF(x)$,

б) $F(x)F(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$,

в) $F(x)F\left(x+\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}F(2x)$.

II. а) $F(x+1)=xF(x)$,

б) $F(x)F\left(x+\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}F(2x)$,

в) $F(x)\neq 0$ при $x>0$.

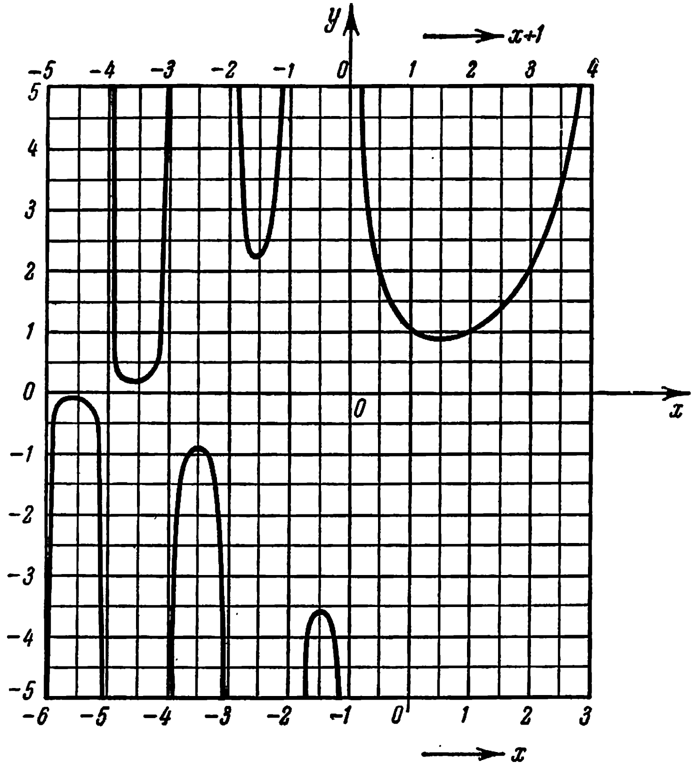

Рис. 14. Гамма-функции $\Gamma(x)$ и $\Gamma(x+1) = \Pi(x)$.

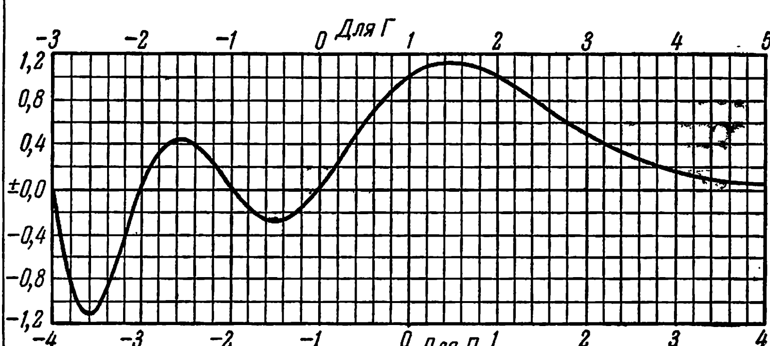

Рис. 15. Функции $\dfrac{1}{\Gamma(x)}$ и $\dfrac{1}{\Pi(x)}$.

III. а) $F(1)=1$,

б) $F(x+1)=xF(x)$,

в) $F(x)$ — логарифмико-выпуклая функция при $x>0$ (гл. I, § 3, п. 17).

IV. а) $F(1)=1$,

б) $F(x+1)=xF(x)$,

в) $\left(\frac{e}{x}\right)^x F(x)$ убывает при $x>0$ (или $x>M$).

2°. Определение, функциональные уравнения и простейшие свойства B (бета)-функции Эйлера. *Бета-функция Эйлера* определяется интегралом

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \qquad \alpha>0, \quad \beta>0. \tag{6.560}$$

Интегрирование по частям приводит к функциональным соотношениям

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta)=\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha, \beta-1), \qquad \beta>1, \tag{6.561}$$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta)=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha-1, \beta), \qquad \alpha>1. \tag{6.562}$$

B-функция симметрична:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta)=\mathrm{B}(\beta, \alpha). \tag{6.563}$$

Связь с биномиальными коэффициентами и их обобщение. Так как при m и n натуральных

$$\mathrm{B}(m, n)=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}, \tag{6.564}$$

то

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n\mathrm{B}(m, n)}&=\binom{m+n-1}{m-1}, \\ \frac{1}{m\mathrm{B}(m, n)}&=\binom{m+n-1}{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{6.565}$$

откуда при $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\binom{\alpha+\beta-1}{\beta-1} = \frac{1}{\alpha B(\alpha, \beta)}, \tag{6.566}$$

$$\binom{\alpha+\beta-1}{\alpha-1} = \frac{1}{\beta B(\alpha, \beta)}. \tag{6.567}$$

Выражение через гамма-функцию. Замена в (6.560) x через $\frac{y}{1+y}$ приводит к формуле

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}\,dy}{(1+y)^{\alpha+\beta}}, \tag{6.568}$$

откуда

$$B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\, y^{\alpha-1}\,dy}{(1+y)^{\alpha+\beta}} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x(1+y)} x^{\alpha+\beta-1} y^{\alpha-1}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} x^{\beta-1}\,dx \int_0^\infty e^{-xy} (xy)^{\alpha-1}\,d(xy), \tag{6.569}$$

и, наконец,

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{6.570}$$

Другие интегральные представления:

$$B(\alpha, \beta) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1}\varphi \cos^{2\beta-1}\varphi\,d\varphi. \tag{6.571}$$

$$B(\alpha, \beta) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha}\varphi \cos^{2\beta}\varphi\,d\varphi, \qquad \alpha > -\frac{1}{2}, \quad \beta > -\frac{1}{2}. \tag{6.572}$$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt = 2\int_0^\infty \frac{t^{2\alpha-1}}{(1+t^2)^{\alpha+\beta}}\,dt, \tag{6.573}$$

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}+t^{\beta-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{6.574}$$

$$\mathrm{B}(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2^{2\alpha-1}} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}\,dt}{\sqrt{t}}. \tag{6.575}$$

Представления в виде ряда и бесконечного произведения:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n)}{n!\,(\alpha+n)}, \quad \beta > 0. \tag{6.576}$$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{k(\alpha+\beta+k)}{(\alpha+k)(\beta+k)}. \tag{6.577}$$

6. Функции Бесселя. Функции Бесселя первого рода $J_n(x)$ определяются как коэффициенты степенного разложения по переменной t производящей функций $e^{\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)x}$:

$$e^{\frac{1}{2}(t-t^{-1})x} = e^{\frac{x}{2}t} e^{-\frac{x}{2}t^{-1}} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{r+s} t^{r-s}}{2^{r+s} r!\, s!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n, \tag{6.578}$$

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s}(n+s)!\, s!}, \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{6.579}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{6.580}$$

Функции Бесселя мнимого аргумента $I_n(x)$ определяются из соотношения

$$e^{\frac{1}{2}(t+t^{-1})x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)\, t^n: \tag{6.581}$$

$$I_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{n+2s}}{2^{n+2s}(n+s)!\, s!}, \tag{6.582}$$

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix), \tag{6.583}$$

$$I_{-n}(x) = i^n J_{-n}(ix) = i^n(-1)^n J_n(ix) = i^{-n} J_n(ix) = I_n(x). \tag{6.584}$$

Тригонометрические формы производящих функций. Из (6.578) при $t = e^{i\varphi}$ следует

$$\begin{aligned} e^{ix\sin\varphi} &= J_0(x) + 2iJ_1(x)\sin\varphi + \\ &+ 2J_2(x)\cos 2\varphi + 2iJ_3(x)\sin 3\varphi + 2J_4(x)\cos 4\varphi + \end{aligned} \tag{6.585}$$

откуда

$$\cos(x\sin\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos 2k\varphi, \tag{6.586}$$

$$\sin(x\sin\varphi) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(x)\sin(2k+1)\varphi, \tag{6.587}$$

аналогично

$$e^{ix\cos\varphi} = J_0(x) + 2\sum_{s=1}^{\infty} i^s J_s(x)\cos s\varphi, \tag{6.588}$$

$$\cos(x\cos\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x)\cos 2k\varphi, \tag{6.589}$$

$$\sin(x\cos\varphi) = 2\sum_{k} (-1)^k J_{2k+1}(x)\cos(2k+1)\varphi. \tag{6.590}$$

Интеграл Бесселя. Рассматривая (6.586), (6.587), (6.589), (6.590) как разложения Фурье, получаем

$$\int_0^{\pi} \cos n\varphi \cos(x\sin\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} \pi J_n(x) & \text{при } n=2k,\ n=0, \\ 0 & \text{при } n=2k+1. \end{cases} \tag{6.591}$$

$$\int_0^{\pi} \sin n\varphi \sin(x\sin\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0,\ n=2k, \\ (x) & \text{при } n=2k+1. \end{cases} \tag{6.592}$$

Из этих формул вытекает, что

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin\varphi)\, d\varphi \qquad \text{(Бессель)}, \qquad (6.593)$$

где n есть нуль или целое положительное число.

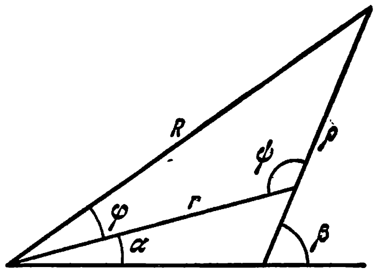

Рис. 16.

Теорема сложения. Так как

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u+v)\, t^n = e^{\frac{1}{2}(u+v)(t-t^{-1})} = e^{\frac{1}{2}u(t-t^{-1})} e^{-\frac{1}{2}v(t-t^{-1})} =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u)\, t^s \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(v)\, t^r,$$

то

$$J_n(u+v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u)\, J_{n-s}(v), \qquad (6.594)$$

или

$$J_n(u+v) = \sum_{s=0}^{n} J_s(u)\, J_{n-s}(v) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \{J_s(u)\, J_{n+s}(v) + J_{n+s}(u)\, J_s(v)\}. \qquad (6.595)$$

Аналогично

$$I_n(u+v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} I_s(u)\, I_{n-s}(v) = \sum_{s=0}^{n} I_s(u)\, I_{n-s}(v) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \{I_s(u)\, I_{n+s}(v) + I_{n+s}(u)\, I_s(v)\}. \qquad (6.596)$$

Теорема сложения в форме Неймана. Из рис. 16 следует

$$R=\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi},$$

$$R\cos(\varphi+\alpha)=r\cos\alpha+\rho\cos\beta=r\cos\alpha+\rho\cos(\pi-\psi+\alpha)=$$
$$=r\cos\alpha+\rho\cos(\alpha-\psi),$$

$$e^{iR\cos(\varphi+\alpha)}=e^{ir\cos\alpha}e^{i\rho\cos(\alpha-\psi)},$$

откуда

$$\sum_n i^n J_n(R)\,e^{in\varphi}e^{in\alpha}=\sum_m i^m J_m(r)\,e^{im\alpha}\sum_l(-1)^l i^l J_l(\rho)\,e^{il\psi}e^{il\alpha}=$$
$$=\sum_n i^n e^{in\alpha}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l J_l(\rho)\,J_{n-l}(r)\,e^{-il\psi}, \qquad (6.597)$$

и

$$J_n(R)\,e^{in\varphi}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l J_l(\rho)\,J_{n-l}(r)\,e^{-il\psi}, \qquad (6.598)$$

$$J_n(R)\cos n\varphi=\sum_l(-1)^l J_l(\rho)\,J_{n-l}(r)\cos l\psi, \qquad (6.599)$$

$$J_n(R)\sin n\varphi=\sum_l(-1)^{l+1} J_l(\rho)\,J_{n-l}(r)\sin l\psi. \qquad (6.600)$$

При $n=0$

$$J_0(R)=J_0(R)\,J_0(\rho)+2\sum_{l=1}^{\infty}J_l(\rho)\,J_l(r)\cos l\psi. \qquad (6.601)$$

При $r=\rho$, $R=2\rho\sin\frac{\psi}{2}=z\sin\theta$

$$J_0(z\sin\theta)=J_0^2\left(\frac{z}{2}\right)+2\sum_{l=1}^{\infty}J_l^2\left(\frac{z}{2}\right)\cos 2l\theta. \qquad (6.602)$$

Дифференциальное уравнение Бесселя, которому удовлетворяют функции Бесселя $J_n(x)$, есть

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)\,y=0. \qquad (6.603)$$

Соответственно $I_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+n^2)\,y=0. \qquad (6.604)$$

Рекуррентные формулы:

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x). \tag{6.605}$$

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x). \tag{6.606}$$

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \tag{6.607}$$

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x). \tag{6.608}$$

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n) = x^n J_{n-1}, \quad \frac{d}{dx}(x^{-n} J_n) = -x^{-n} J_{n+1}. \tag{6.609}$$

Функции Бесселя первого рода $J_n(x)$, n — нецелое,

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)\Gamma(n+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \tag{6.610}$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению (6.603).

Вторым линейно-независимым решением этого уравнения служит функция $J_{-n}(x)$ (n—нецелое) и потому общее решение имеет вид

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Рекуррентные формулы (6.605) — (6.609) имеют место также для $J_n(x)$, где n нецелое.

Функции Бесселя первого рода полуцелого порядка $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ выражаются через элементарные функции, в частности,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s+1)!} = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{\sin x}{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \tag{6.611}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \tag{6.612}$$

Выражения для $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ при любом целом n могут быть получены последовательным применением рекуррентных формул.

Функции Бесселя второго рода $Y_n(x)$ (функции Вебера) выражаются через функции Бесселя первого рода посредством равенств:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \quad \text{при } n \text{ целом}, \tag{6.613}$$

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \quad \text{при } n \text{ нецелом}. \tag{6.614}$$

Функция $Y_n(x)$, так же как и функция $J_n(x)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (6.603), общее решение которого при n целом имеет вид $y = C_1J_n(x) + C_2Y_n(x)$.

В качестве второго решения уравнения (6.604) обычно берут *функцию Макдональда*

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi} \quad \text{при } n \text{ нецелом}. \tag{6.615}$$

Рекуррентные формулы:

$$Y_{n+1}(x) = \frac{n}{x}Y_n(x) - Y_n'(x). \tag{6.616}$$

$$Y_{n-1}(x) = \frac{n}{x}Y_n(x) + Y_n'(x). \tag{6.617}$$

$$Y_n'(x) = \frac{1}{2}[Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x)]. \tag{6.618}$$

$$Y_{n+1}(x) + Y_{n-1}(x) = \frac{2n}{x}Y_n(x). \tag{6.619}$$

$$I_{n+1}(x) - I_{n-1}(x) = -\frac{2n}{x}I_n(x). \tag{6.620}$$

$$K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) = \frac{2n}{x}K_n(x). \tag{6.621}$$

Соотношения между функциями Бесселя первого и второго рода:

$$J_n(x)Y_{n+1}(x) - Y_n(x)J_{n+1}(x) = -\frac{2}{\pi x}. \tag{6.622}$$

$$I_n(x)K_{n+1}(x) + K_n(x)I_{n+1}(x) = \frac{1}{x}. \tag{6.623}$$

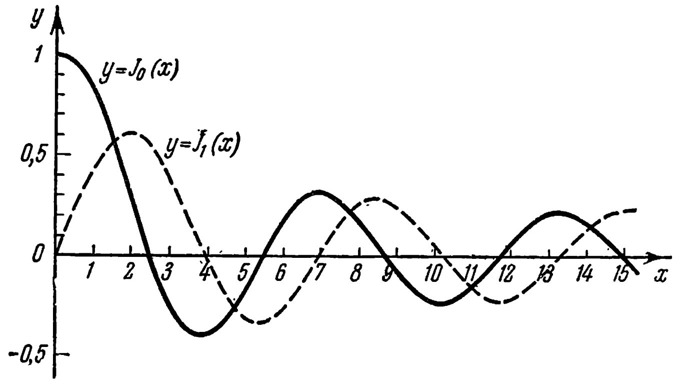

Рис. 17. Функции Бесселя первого рода $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

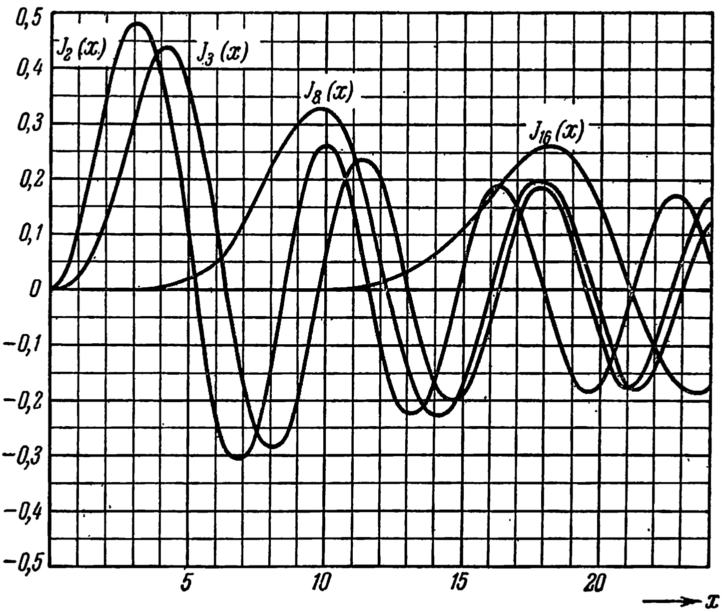

Рис. 18. Функции Бесселя первого рода $J_2(x)$, $J_3(x)$, $J_8(x)$, $J_{16}(x)$.

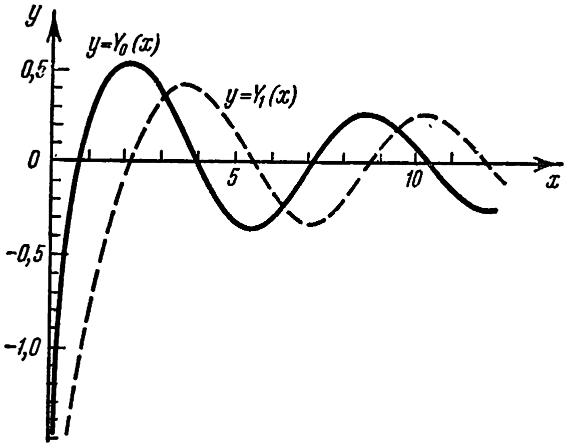

Рис. 19. Функции Бесселя второго рода $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$.

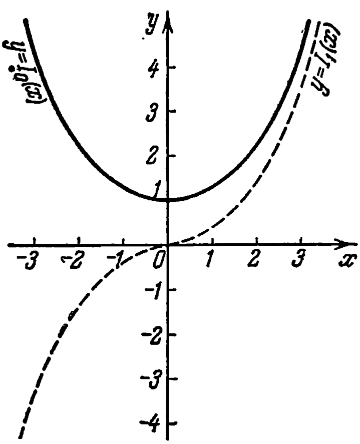

Рис. 20. Функции Бесселя первого рода $I_0(x)$ и $I_1(x)$.

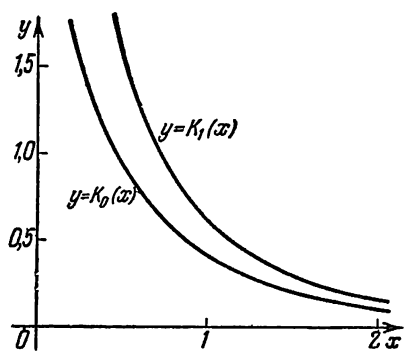

Рис. 21. Функции Бесселя второго рода $K_0(x)$ и $K_1(x)$.

Представление в виде ряда:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{2}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \qquad (6.624)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7 + \qquad (6.625)$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \qquad (6.626)$$

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{x}{2}\right)J_1(x) - \frac{2}{\pi x} -$$
$$- \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\left(2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right). \qquad (6.627)$$

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \qquad (6.628)$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 + \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7 + \qquad (6.629)$$

$$K_0(x) = -\left(C + \ln\frac{x}{2}\right)I_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \qquad (6.630)$$

$$K_1(x) = \left(C + \ln\frac{x}{2}\right)I_1(x) + \frac{1}{x} -$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2n+2}\right), \qquad (6.631)$$

где C — эйлерова постоянная (см. § 1, п. 1, 3°).

Асимптотические формулы (при больших значениях x).

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_0(x)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + Q_0(x)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad (6.632)$$

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_1(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q_1(x)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad (6.633)$$

$$Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[-P_0(x)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+Q_0(x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{6.634}$$

$$Y_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[-P_1(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+Q_1(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{6.635}$$

где

$$P_0(x) = 1 - \frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{4!\,(8x)^4} - \ldots$$

$$Q_0(x) = -\frac{1}{1!\,8x} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^3} - \ldots$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{1^2\cdot 3\cdot 5}{2!\,(8x)^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 9}{4!\,(8x)^4} + \ldots$$

$$Q_1(x) = \frac{1\cdot 3}{1!\,8x} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}{3!\,(8x)^3} + \ldots$$

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + \frac{1^2}{8x} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^3} + \ldots\right), \tag{6.636}$$

$$I_1(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 - \frac{1\cdot 3}{8x} - \frac{1^2\cdot 3\cdot 5}{2!\,(8x)^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}{3!\,(8x)^3} - \ldots\right), \tag{6.637}$$

$$K_0(x) \approx e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(1 - \frac{1^2}{8x} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^3} + \ldots\right), \tag{6.638}$$

$$K_1(x) \approx e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(1 + \frac{1\cdot 3}{8x} - \frac{1^2\cdot 3\cdot 5}{2!\,(8x)^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}{3!\,(8x)^3} - \ldots\right). \tag{6.639}$$

Графики бесселевых функций даны на рис. 17, 18, 19) 20, 21.

БИБЛИОГРАФИЯ

Литература к главе I

1. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, М., Физматгиз, 1959.
2. Валле-Пуссен Ш., Курс анализа бесконечно малых, М. — Л., ГТТИ, 1933.
3. Гурса Э., Курс математического анализа, М. — Л., ГТТИ, 1933.
4. Дубовицкий А. Я., Аксиоматическое построение действительных чисел, Математическое просвещение, вып. 2 (1957).
5. Карцев М. А., Арифметические устройства электронных цифровых машин, М., Физматгиз, 1958.
6. Колмогоров А. Н., К обоснованию теории вещественных чисел, Математическое просвещение, вып. 2 (1957).
7. Колмогоров А. Н., К обоснованию метода наименьших квадратов, УМН **1**, вып. 1 (1946).
8. Красносельский М. Г., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.
9. Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, М. — Л., Учпедгиз, 1940.
10. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А., Курс математического анализа, т. I, II, М., Гостехиздат, 1957.
11. Полиа Г. и Сегё Г., Задачи и теоремы из анализа, т. I, II, М., Гостехиздат, 1956.
12. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. I, М., Гостехиздат, 1952.
13. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, т. I, II, ОНТИ, 1934.
14. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III, М. — Л., Гостехиздат, 1951, 1951, 1949.
15. Хинчин А. Я., Краткий курс математического анализа, М., Физматгиз, 1959.
16. Хинчин А. Я., Простейший линейный континуум, УМН **4**, вып. 2 (1949).

Литература к главе II

1. Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М. — Л., Гостехиздат, 1948.
2. Александров А. Д., Выпуклые многогранники, М. — Л., Гостехиздат, 1950.
3. Гильберт Д. и Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, М. — Л., ОНТИ, 1936.
4. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, т. I, ч. I, М. — Л., ОНТИ, 1935.
5. Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., Гостехиздат, 1956.
6. Люстерник Л. А., Применение неравенства Бруна — Минковского к экстремальным задачам, УМН, вып. II (1936).
7. Люстерник Л. А., Неравенство Бруна — Минковского для произвольных измеримых множеств, ДАН 3 (1935), 55—58.
8. Линейные неравенства и смежные вопросы, Сб. переводов под ред. Л. В. Канторовича и В. В. Новожилова, М., ИЛ., 1959.
9. Минковский Г., Общие теоремы о выпуклых многогранниках, УМН, вып. II (1936).
10. Смирнов В. Н., Курс высшей математики, т. I, М., Гостехиздат, 1952.
11. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М. — Л., Гостехиздат, 1951.
12. Хелли Э., О совокупности выпуклых тел с общими точками, УМН, вып. II (1936).
13. Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, М., Гостехиздат, 1952.
14. Шклярский Д. О., Условно сходящиеся ряды векторов, УМН, вып. X (1944), 51—59.
15. Шрейер О. и Шпернер Е., Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, М. — Л., ГОНТИ, 1934.
16. Яглом И. М. и Болтянский В. Г., Выпуклые фигуры, М. — Л., Гостехиздат, 1951.

Литература к главе III

1. Алихашкин Я. И., Один способ расчета дебита для напорного притока к несовершенной скважине, Вычислит. матем. № 1, Изд. АН СССР (1957).
2. Гурса Э., Курс математического анализа, т. I, М. — Л., ГТТИ, 1933.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа. Изд. 4-е, М. — Л., Гостехиздат, 1952.
4. Привалов И. И., Ряды Фурье, М. — Л., ОНТИ, 1934.
5. Романовский В. И., Введение в анализ, Ташкент, Госучпедиздат УзССР, 1939.
6. Рыжик И. М. и Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М. — Л., Гостехиздат, 1951.
7. Салехов Г. С., Вычисление рядов, М., Гостехиздат, 1955.

8. Салехов Г. С., Приложение преобразования Лапласа к суммированию рядов, разложенных по специальным функциям, Уч. зап. Казанск. пед. ин-та, вып. 10 (1955).
9. Толстов Г. П., Ряды Фурье, М. — Л., Гостехиздат, 1951.
10. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, III, М. — Л., Гостехиздат, 1951, 1949.
11. Харди Г., Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1951.
12. Knopp K., Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen, Berlin, 1924.

Литература к главе IV

1. Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, М., ИЛ, 1948.
3. Кармазина Л. Н., Таблицы многочленов Якоби, М., изд. АН СССР, 1954.
4. Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, 1958.
5. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М., Физматгиз, 1958.
6. Люстерник Л. А., О вычислении значений функций одного переменного, Математическое просвещение, вып. 3 и вып. 4 (1958).
7. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М. — Л., Гостехиздат, 1947.
8. Стесин И. М., Обращение ортогональных разложений в непрерывные дроби, Вычисл. матем., № 1 (1957).
9. Хаусхолдер, Численный анализ, 1957.
10. Чебышев П. Л., Собрание сочинений, т. I, М., изд. АН СССР, 1944.
11. Perron O., Die Lehre von der Kettenbrücken, Leipzig und Berlin, 1928.

Литература к главе V

1. Арнольд И. В., Теория чисел, М., Учпедгиз, 1939.
2. Бертран Ж., Алгебра, ч. II, СПб, 1901.
3. Виноградов И. М., Основы теории чисел, М. — Л., Гостехиздат, 1949.
4. Воробьев Н. Н., Числа Фибоначчи, М., Гостехиздат, 1951.
5. Коши О., Курс алгебраического анализа, Лейпциг, 1864.
6. Лобачевский Н. И., Алгебра или вычисление конечных, т. IV полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, М. — Л., Гостехиздат, 1948.
7. Маракуев Н. Н., Элементарная алгебра, т. I, Теория, М., 1903.
8 Марков А. А., Лекции о непрерывных дробях (см. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля), М. — Л., Гостехиздат, 1948.

9. Мешков А., Курс высшей алгебры, Отдел первый, СПб, 1862.
10. Остроградский М. В., Лекции алгебраического и трансцендентного анализа, Первый год, СПб, 1837.
11. Рощин П., Записки по дифференциальному и интегральному исчислениям, Первая часть, СПб, 1888.
12. Сегал Б. И., Непрерывные дроби, Математическое просвещение, вып. 7 (1936).
13. Стилтьес Т. И., Исследования о непрерывных дробях, М., ОНТИ, 1936.
14. Сушкевич А. К., Теория чисел, Харьков, Изд. Харьк. ун-та, 1954.
15. Фербер К., Арифметика, 1914.
16. Хинчин А. Я., Цепные дроби, М. — Л., Гостехиздат, 1949.
17. Хинчин А. Я., Элементы теории чисел, Энциклопедия элементарной математики, Книга первая, М. — Л., Гостехиздат, 1951.
18. Хованский А. Н., Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, М., Гостехиздат, 1956.
19. Хованский А. Н., Работы Л. Эйлера по теории цепных дробей, Истор.-матем. исслед., выпуск X (1957), 305—326.
20. Чеботарёв Н. Г., Теория непрерывных дробей, Казань, 1938.
21. Эскин Л. Д., Об алгоритме Эйлера для извлечения корней, Учен. зап. Казанск. ун-та **115**, кн. 14 (1955), 139—143.
22. Эскин Л. Д., К вопросу о характере сходимости алгоритма Эйлера извлечения корней, Изв. высш. учебн. завед., Матем. **4** (5) (1958), 275—278.

Литература к главе VI

1. Валле-Пуссен Ш. Ж., Курс анализа бесконечно малых, М., ГТТИ, 1933.
2. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, М., Физматгиз, 1958.
3. Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М. — Л., Гостехиздат, 1952.
4. Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М. — Л., Гостехиздат, 1951.
5. Иваненко Д. и Соколов А., Классическая теория поля, М. — Л., Гостехиздат, 1949.
6. Кудрявцев В. А., Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли, М. — Л., ОНТИ, 1938.
7. Ландау Э., Введение в дифференциальное и интегральное исчисление, М., ИЛ, 1948.
8. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, М.—Л., ГТТИ, 1934.
9. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III, М. — Л., Гостехиздат, 1951, 1951, 1949.
10. Харди Г., Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1951.

11. Чезаро Э., Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. I, М. — Л., ОНТИ, 1939.
12. Чезаро Э., Элементарный учебник алгебраического анализа исчисления бесконечно малых, ч. II, Одесса, Матезис, 1914.
13. Шпильрейн Я. Н., Таблицы специальных функций, ч. I и II, М. — Л., ГТТИ, 1933.
14. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций, М., Физматгиз, 1959.
15. Bateman H., Higher Transcendental functions, New York, 1953.
16. Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, Springer, 1924.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Справочно-математическая библиотека,
под общей редакцией
чл.-корр. АН СССР Л. А. Люстерника и доц. А. Р. Янпольского

Математический анализ
(функции, пределы, ряды, цепные дроби).

Редактор *А. Ф. Лапко.*
Техн. редактор *В. Н. Крючкова.*
Корректор *Л. О. Сечейко.*

Сдано в набор 13/XII 1960 г. Подписано к печати 22/IV 1961 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 13,75. Условн. печ. л. 22,55.
Уч.-изд. л. 23,16. Тираж 20 000. Т-03149. Цена книги 1 р. 26 к.
Заказ № 2048.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена 1 р. 26 к.

СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ

1. АРАМАНОВИЧ И. Г., ГУТЕР Р. С. и др., Математический анализ (дифференцирование и интегрирование).

2. ДИТКИН В. А. и ПРУДНИКОВ А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление.

3. ЗАХАРОВ В. К., ЛЮСТЕРНИК Л. А. и др., Таблицы сумм, рядов и произведений. Формулы для вычисления элементарных функций.